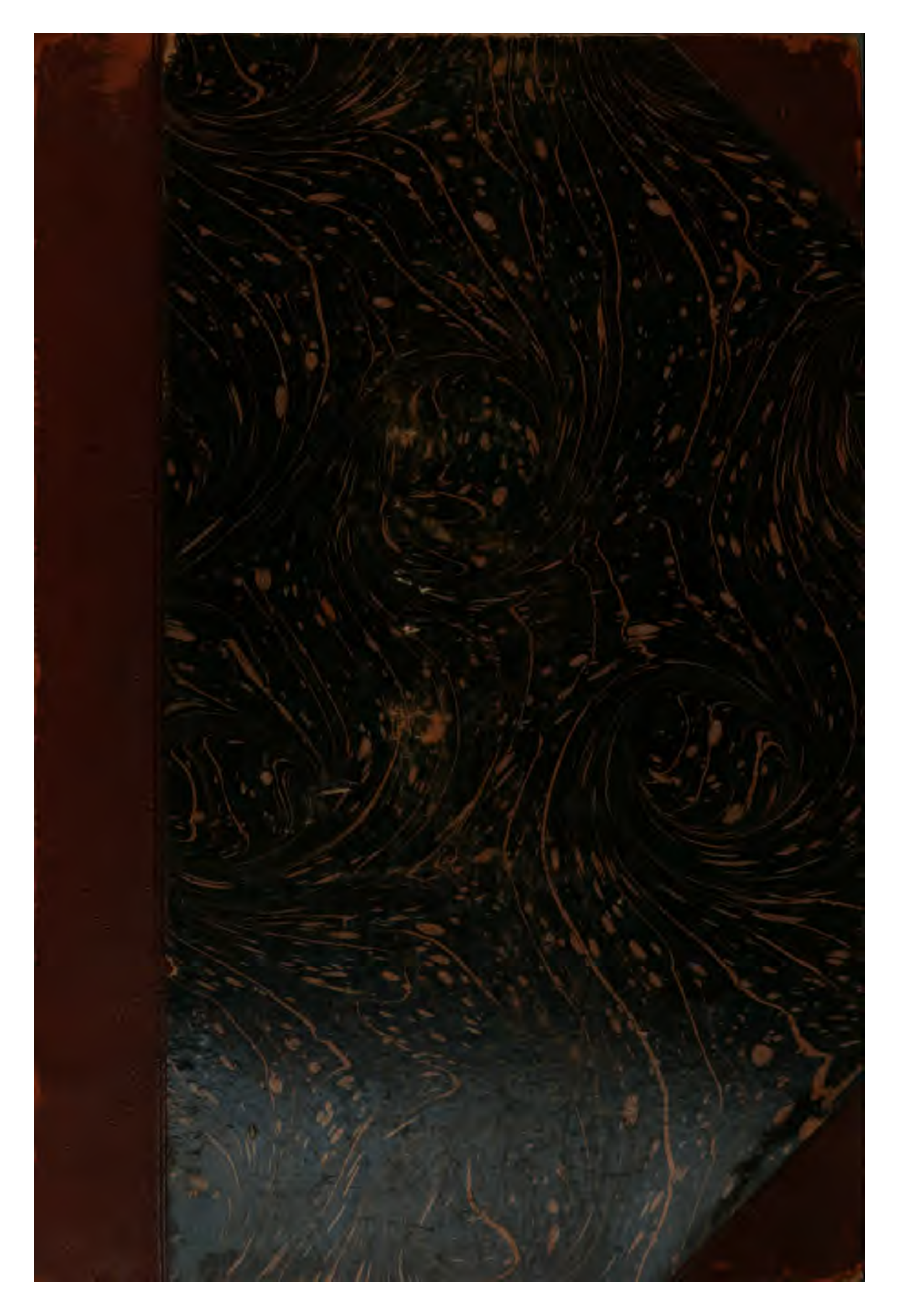
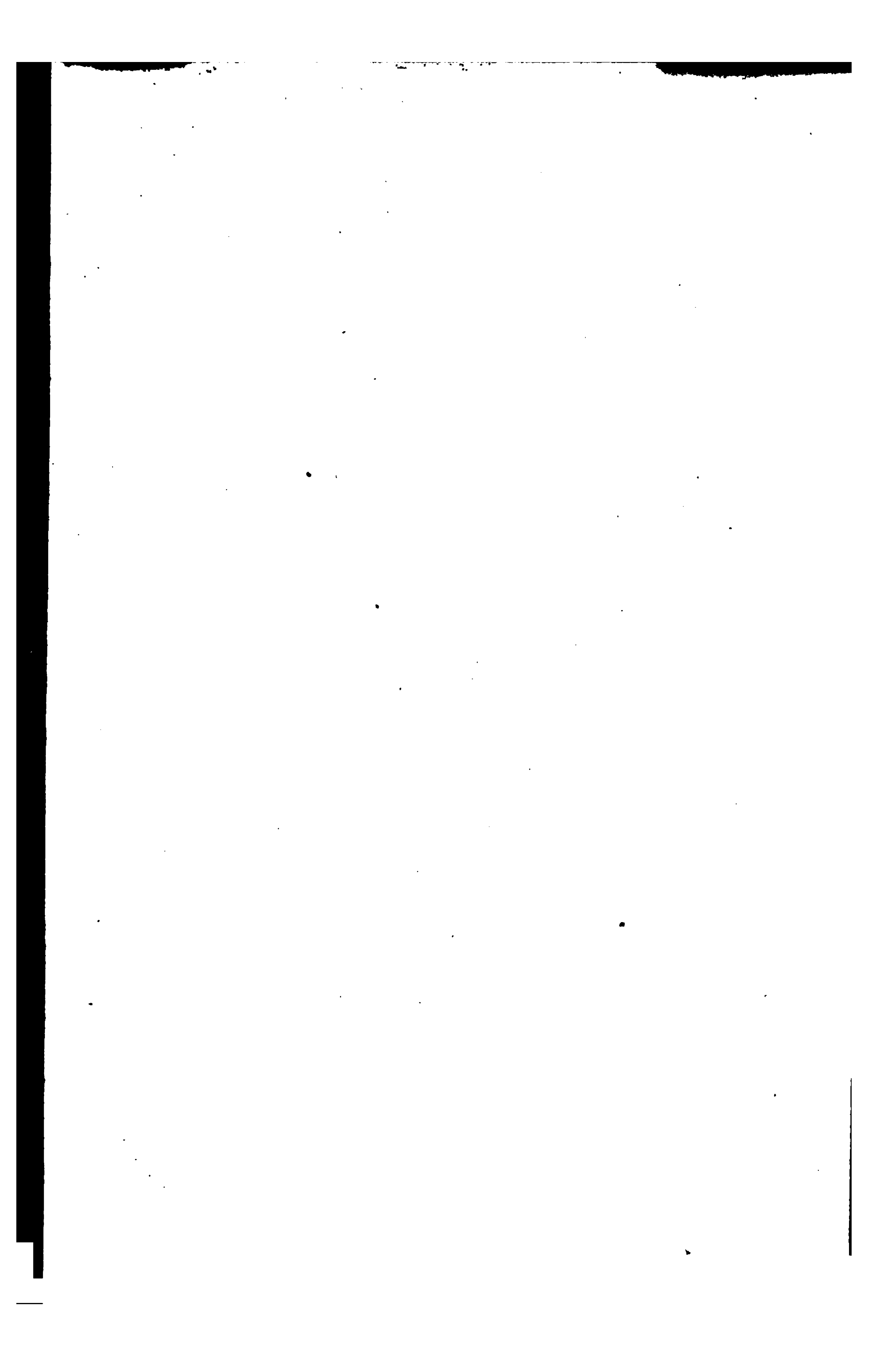




Math 5708.74.2
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
29 Dec., 1888.



ELEMENTE

DER

DARSTELLENDEN GEOMETRIE

VON

DR. RUDOLF STURM,

ORD. PROFESSOR AM POLYTECHNIKUM ZU DARMSTADT.



MIT 12 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1874.

Vorrede.

Die Veranlassung zur Abfassung der vorliegenden Elemente der darstellenden Geometrie gab das Bedürfniss, meinen Zuhörern ein Lehrbuch in die Hände zu geben, in welchem diese Elemente eingehender behandelt werden, als ich es in der kurz bemessenen Zeit der Vorträge thun kann, wenn ich nicht die späteren und schwierigeren Abschnitte zu kurz kommen lassen will. Unumgänglich nothwendig ist aber eine gründliche Kenntniss der Elemente für jeden, der die darstellende Geometrie leicht handhaben und verwenden will; nur wer die Elemente gründlich und vielseitig durchdenkt, die verschiedenen Fälle der Lage der Grundgebilde und ihrer Darstellungen einer eingehenden Betrachtung unterzieht, wird zur Herrschaft über die genannte Disciplin, wie sie vor allem der wissenschaftlich gebildete Techniker besitzen muss, gelangen, wird sich die Beweglichkeit und Lebendigkeit im geometrischen Vorstellen und Denken aneignen, die man mit als eine Hauptfrucht eines gründlichen Studiums dieser Disciplin zu bezeichnen pflegt. In den Elementen wird man daher auch, meine ich, bei jeder Prüfung eine eingehendere Kenntniss fordern müssen, während man bei den schwierigeren Theilen wohl eher mit allgemeinen Anschauungen sich begnügen kann.

Gleichzeitig wünsche ich denjenigen Schulen, die für das Polytechnicum in Darmstadt vorbereiten und darstellende Geometrie in ihren Lehrplan aufgenommen haben, also vorzugsweise den hessischen Realschulen 1. Ordnung mit diesem Buche den Stoff für ihren Unterricht und die Gelegenheit zu geben, diesen Unterricht dem meinigen anzupassen.

Ersetzen wird der Unterricht in der darstellenden Geometrie auf den Realschulen den betreffenden Theil desjenigen auf der Hochschule nicht können; denn, abgesehen von allen anderen Gründen, jede (deutsche) technische Hochschule wird sich verpflichtet fühlen, dem Be-

dürfnisse der früheren Gymnasiasten, welche gar keine Kenntniss in darstellender Geometrie mitbringen, ebenfalls gerecht zu werden und diese Disciplin von Anfang an lehren.

Gerade die Docenten der technischen Hochschulen haben, ähnlich und vielleicht noch in höherem Maasse wie die Vertreter der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer auf den Universitäten, Gelegenheit, die Unannehmlichkeit der Bifurcation der höheren Bildung in Deutschland und die aus derselben sich ergebende ungleichartige Vorbereitung kennen zu lernen, und werden wohl meistens das Resultat der im October 1873 im preussischen Unterrichts-Ministerium über verschiedene Fragen des höheren Schulwesens abgehaltenen Conferenz, dass, weil, wie es den Anschein hat, von Seiten der Vertreter des Gymnasiallehrfachs gar keine Concessionen gemacht wurden, diese Zweitheilung in Preussen, sowie wohl auch in den übrigen Staaten des deutschen Reichs bestehen bleiben wird, sehr bedauern.

Der Vortheil, den die Realschüler für ihr späteres Studium dadurch zu gewinnen scheinen, dass sie gewisse Fächer schon kennen gelernt haben, ist nur zu oft illusorisch; denn, wie gesagt, diese Fächer müssen wegen der früheren Gymnasiasten auf der Hochschule doch durchgenommen werden, und wie die menschliche Natur nun einmal ist, manche der früheren Realschüler vernachlässigen die Vorträge über solche Gegenstände, die sie schon zu kennen glauben, und versäumen dadurch mindestens, die Behandlungs- und Betrachtungsweise des Lehrers kennen zu lernen; gelangt dann der Vortrag zu ihnen neuen Gegenständen, so finden sie sich schwer zurecht und stehen bald hinter den früheren Gymnasiasten zurück.

Dieses Zurückstehen der früheren Realschüler gerade in solchen Fächern, die sie schon gehabt haben, scheint auch vielfach auf der Universität beobachtet zu sein, es wird mehrfach bei Gelegenheit der akademischen Gutachten über die Zulassung der Realschul-Abiturienten zu Universitäts-Studien erwähnt, aber nirgends, wie es scheint, auf den genannten Grund zurückgeführt; wie auch sonst wiederholt die geringeren Leistungen der Realschulen betont werden, aber kaum jemals darauf hingewiesen wird, dass dieselben wohl zum grossen Theil ihren Grund in der bisherigen Zurücksetzung der Realschulen und der daraus folgenden Ausschliessung der meisten Knaben aus den gebildeteren Ständen, besonders dem der Beamten, von denselben haben möchten.

Im Hinblicke auf die oben besprochene Erfahrung halte ich es für wünschenswerth, dass das mathematische Realschulpensum das der

Gymnasien nicht bedeutend überschreite, wenigstens nicht, wenn es behufs der Vorbereitung für die technische Hochschule geschieht. Willkommener werden der letzteren jederzeit Studirende aus solchen Schulen sein, die sich auf das Gebiet der Elementar-Mathematik beschränken, dieses aber gründlich behandeln, als aus solchen, welche dasselbe weit überschreiten, dafür aber die intensive Ausbildung vernachlässigen; überdies gehen gewisse Fächer über das Alter und die Durchschnitts-Begabung der Schüler der vorbereitenden Anstalten hinaus und gehören auf die Hochschule. Lassen wir dahingestellt, ob dies für die darstellende Geometrie, wenn sie wissenschaftlich behandelt wird, nicht auch gilt; jedenfalls erlaube ich mir als Wunsch auszusprechen, dass diejenigen Schulen, denen sie als Pensum zugewiesen ist, sich auf das in diesen Elementen Gegebene beschränken möchten.

Der Rahmen, innerhalb dessen sich mein Buch bewegt, ist die orthogonalprojectivische Darstellung geradliniger und ebenflächiger Gebilde. —

Stereometrische Figuren habe ich in den Tafeln fast ganz ausgeschlossen: ich hätte mich der Mühe unterzogen, projectivisch exacte, z. B. axonometrisch gezeichnete Figuren, wie sie in diesem Buche (aber freilich wohl auch in jedem guten Lehrbuche der Stereometrie) nothwendig gewesen wären, zu zeichnen; wenn ich nicht gerade für gut gehalten hätte, den schon stereometrisch vorgebildeten Leser, wie ich ihn voraussetze, durch das Fehlen der Figuren zur räumlichen Vorstellung zu nöthigen und ihm so auch Gelegenheit zur Uebung in derselben zu geben; keine der Figuren, deren räumliche Vorstellung verlangt wird, ist so complicirt, dass man ihre einzelnen Gebilde nicht übersehen und die benutzten Bezeichnungen nicht behalten könnte. —

Ich habe mich ferner bemüht, stets so correct wie möglich zu sprechen, aus dem Wunsche, dass dieses Buch mehr noch als der mündliche Vortrag oder gar die doch meistens flüchtige Nachschrift des Studirenden demselben ein Muster für richtige mathematische Ausdrucksweise sein möchte; denn gerade hierin habe ich wenige genügende Leistungen kennen gelernt: die Fähigkeit, für den Inhalt die richtigen genau ihn deckenden Worte zu finden, habe ich oft vermisst, und die stilistischen Regeln zu befolgen, halten viele in schriftlichen mathematischen Arbeiten nicht für nothwendig.

Ich wünsche, dass es mir meistens gelungen sei, den correcten Ausdruck zu geben; ich habe es wenigstens erstrebt. —

Wie in anderen Büchern ähnlichen Charakters ist auch hier auf Quellennachweise verzichtet worden; wer zum weiteren Studium Herrn Fiedler's Grundriss der darstellenden Geometrie, zu dem ich mein Buch als Vorbereitung betrachte, benutzt, findet die historischen Citate in befriedigender Weise in diesem ausgezeichneten Buche, aus welchem der unterzeichnete Verfasser selbst reiche Anregung empfangen hat.

Darmstadt, den 1. August 1874.

R. Sturm.

Inhalt.

Bemerkung.

In den Tafeln steht oft statt des untern Index 1 ein kommaartiger Index; da solche im Texte nicht vorkommen, so ist ein Irrthum wohl nicht möglich.

Elemente der darstellenden Geometrie.

Einleitung.

1. Die graphische Darstellung eines räumlichen Gebildes im Raume selbst bietet im Allgemeinen Schwierigkeiten; es fragt sich deshalb, ob es nicht möglich sei, *räumliche Gebilde auf einer Ebene darzustellen*, d. h. die zur Darstellung des Gebildes im Raume vorzunehmenden Constructionen durch solche zu ersetzen, die in der Ebene geschehen. Diese Darstellung in der Ebene muss aber offenbar derartig sein, dass sie auch wirklich das räumliche Gebilde ersetzt, dass dasselbe also aus dieser ebenen Darstellung im Raume wiederhergestellt werden kann, entweder blos in geistiger Vorstellung oder, wie bei Gegenständen der Technik: Bauwerken, Maschinen u. s. f., in wirklicher Aufführung. Es ist demnach nothwendig, dass die Lage der einzelnen Theile des Gebildes, ihre Dimensionen, die vorkommenden Winkel aus der ebenen Darstellung (und zwar immer wieder durch Constructionen, die nur in der Ebene des Zeichenblatts erfolgen dürfen) zu ermitteln sind. *Die Methoden nun zu lehren, durch welche eine solche ebene Darstellung eines räumlichen Gebildes ermöglicht wird, aus derselben das Gebilde selbst reconstruirt werden kann, die Beziehungen aufzufinden, die zwischen dem räumlichen Gebilde und seiner ebenen Darstellung bestehen, ist Sache des Theils der Geometrie, welcher darstellende (beschreibende, descriptive) Geometrie genannt wird.* Als Gründer derselben gilt *Monge* (1746—1818), weil er zuerst die (zum Theil schon vor ihm bekannten) Methoden und Sätze streng mathematisch begründete und zu einem wissenschaftlichen Ganzen zusammenfügte.

2. Die Methode der Darstellung ist die sogenannte *Projectionsmethode*. Man sagt, *ein Gebilde ist die Projection eines andern, wenn im Allgemeinen jedem Punkte des letzteren ein Punkt des ersteren, seine Projection, entspricht.* Die geraden Linien, welche die beiden entsprechenden Punkte verbinden, heissen *projicirende Linien oder Projectionsstrahlen.* Für un-

seren Zweck ist es nun nothwendig, dass die Projection eben sei; man projicirt also auf eine Ebene, die *Projectionsebene.*

3. Die nächst liegende Art zu projiciren ist die, dass *die Projectionsstrahlen alle durch einen und denselben Punkt O gehen.* Dieser feste Punkt heisst das *Projectionscentrum*, die Projection (mit welchem Worte stets sowohl die Operation, als das durch dieselbe in der Projectionsebene erhaltene Gebilde bezeichnet wird) *Centralprojection* (*Perspective*).*) Die Projectionsebene heisse Π. Ist also P ein Punkt des darzustellenden Gebildes, so ist der Punkt P_1, in dem die Ebene Π von dem Projectionsstrahle OP getroffen wird, die Centralprojection von P auf Π.

Selbstverständlich muss das Centrum O ausserhalb Π fallen, sonst hätten sämmtliche Punkte des Raumes dieselbe Projection.

Alle Punkte, die auf einer durch O gehenden Geraden liegen, haben diese zum gemeinsamen Projectionsstrahl, also dieselbe Centralprojection (aus O auf Π).

Es giebt Punkte im Raume, welche keine Projectionen aus O auf Π haben; sie liegen sämmtlich in der Ebene, welche durch O parallel zu Π geht; denn ihre Projectionsstrahlen sind zu Π parallel.

4. Ist g**) eine Gerade des darzustellenden Gebildes, so liegen die Projectionsstrahlen aller ihrer Punkte in der Ebene, welche den Punkt O mit der Geraden g verbindet, die Projectionen dieser Punkte also auf der Geraden g_1, in welcher diese Ebene (welche man mit Og bezeichnen kann) die Projectionsebene Π schneidet. Diese Gerade g_1 nennt man die (Central-) Projection der Geraden g aus O auf Π und die Ebene Og *die projicirende Ebene* von g.

Die Centralprojectionen der Punkte einer Geraden liegen auf der Centralprojection dieser Geraden.

Sämmtliche Geraden einer Ebene durch O haben dieselbe zur gemeinsamen projicirenden Ebene, folglich besitzen sie dieselbe Centralprojection (aus O auf Π).

Für alle Geraden, die in der durch O zu Π parallel geführten Ebene liegen, ist diese Ebene die gemeinsame projicirende Ebene; da dieselbe Π nicht schneidet, so haben diese Geraden keine Centralprojection (aus O auf Π).

---

*) Die Perspective wurde als selbständige Wissenschaft schon vor Monge besonders von dem deutschen Mathematiker Lambert (1718—1779) bearbeitet.

**) Im Allgemeinen soll daran festgehalten werden, dass bei der Bezeichnung eines Punktes, einer Geraden, einer Ebene durch einen einzigen Buchstaben dieser bez. aus dem grossen lateinischen, kleinen lateinischen, griechischen Alphabete gewählt wird.

Eine Gerade, welche durch O selbst geht, ist für alle ihre Punkte Projectionsstrahl, projicirt sich also in einen einzigen Punkt (Nr. 3).

5. Denken wir uns das Auge im Projectionscentrum, so wird sich jeder Punkt des Raumes mit seiner Projection aus O auf Π scheinbar decken: die Centralprojection eines räumlichen Gebildes wird mithin auf dieses Auge denselben Eindruck machen wie das Gebilde selbst. Insofern bietet die Centralprojection (Perspective) den grössten Vorzug; sie ist deshalb für die Malerei vom höchsten Werthe. Aber ihre Constructionen (sowohl die Herstellung eines perspectivischen Bildes selbst, als auch die Ermittelung der wahren Dimensionen und Winkel des Raumgebildes aus seinem perspectivischen Bilde) sind nicht so einfach, dass die darstellende Geometrie mit ihr begonnen werden könnte.

6. Wir wenden uns deshalb zu einer leichteren Art der Projection, zu *der Parallelprojection, bei welcher die Projectionsstrahlen alle parallel sind.*

Die Parallelprojection eines Punktes P auf die Ebene Π ist also der Schnittpunkt des durch P in der gegebenen Richtung gezogenen Projectionsstrahls mit Π; man ersieht, dass es natürlich nöthig ist, die Projectionsstrahlen nicht parallel der Projectionsebene selbst anzunehmen; vermeidet man dies, so erhält man für jeden Punkt eine Projection.

Durch jede Gerade g kann man bekanntlich parallel zu einer anderen (ihr nicht parallelen) Geraden eine und nur eine Ebene führen; also auch nur eine mit den Projectionsstrahlen parallele Ebene (sobald die Gerade g nicht selbst zu diesen parallel ist). Diese Ebene enthält die Projectionsstrahlen aller Punkte von g, und die Projectionen dieser Punkte liegen auf der Schnittlinie g_1 der Ebene mit Π. Also ist diese Ebene die projicirende Ebene von g und g_1 die (Parallel-) Projection von g auf Π.

Eine Gerade, welche den Projectionsstrahlen parallel ist, ist für alle ihre Punkte Projectionsstrahl, projicirt sich mithin als ein einziger Punkt.

7. Von der Parallelprojection ist ein besonders wichtiger Fall der, wenn *die Projectionsstrahlen auf der Projectionsebene senkrecht stehen: rechtwinklige, orthogonale, orthographische, Normalprojection;* im Gegensatze zu ihr heisst die Parallelprojection, bei der dies nicht der Fall ist, schräge (schiefe) Parallelprojection, klinogonale, klinographische Projection, oft auch Cavalier-Perspective, weil ihre Projectionen plastischer sind, als die der Orthogonalprojection, und daher mehr mit den perspectivischen Bildern zu vergleichen, andererseits aber schneller

herzustellen sind als diese, was durch das Adjectiv *cavalière* ausgedrückt wird.

Die rechtwinklige Projection ist die einfachste und am meisten angewandte. Wir werden uns im Folgenden nur mit derselben beschäftigen und unter Projection schlechthin die Orthogonalprojection verstehen.

Erster Abschnitt.

Darstellung auf einer einzigen Projectionsebene.

a) Darstellung des Punktes.

8. *Die orthogonale Projection* A_1 *eines Punktes* A *auf eine Ebene* Π *ist der Fusspunkt des aus* A *auf* Π *gefällten Lothes.* Die Länge AA_1 giebt uns die Entfernung des Punktes von Π an oder, indem wir der Bequemlichkeit der Anschauung und der Sprache halber Π horizontal voraussetzen, die Höhe von A über Π (die Tiefe unter Π); wir wollen diesen Abstand positiv oder negativ annehmen, je nachdem A über oder unter Π liegt.

Durch A *ist ersichtlich* A_1 *bestimmt, nicht aber umgekehrt* A *durch* A_1*; vielmehr ist* A_1 *Projection von einfach unendlich vielen Punkten, welche alle auf dem Lothe liegen, das in* A_1 *auf* Π *errichtet ist.*

Ein Punkt, der in Π selbst liegt, fällt mit seiner Projection zusammen, sein Abstand ist Null.

b) Darstellung der geraden Linie.

9. Wie in der Parallelprojection überhaupt, so *enthält* auch hier *die projicirende Ebene einer Geraden* g *die Projectionsstrahlen* (hier auch Projectionslothe zu nennen) *aller Punkte von* g. *Ihr Schnitt mit* Π *ist die Projection* g_1 *von* g. *Die projicirenden Ebenen sind,* weil sie zu Π senkrechte Geraden enthalten, *selbst senkrecht zu* Π; zu der Bestimmung der projicirenden Ebene einer Geraden reicht ausser dieser noch das Projectionsloth irgend eines ihrer Punkte hin.

10. *Steht eine Gerade auf der Projectionsebene senkrecht, so projicirt sie sich als Punkt.* Sie bildet dann bekanntlich mit allen durch ihren Fusspunkt in Π gezogenen Geraden rechte Winkel.

Ist eine Gerade der Projectionsebene parallel, so ist sie auch ihrer Projection parallel, weil alle ihre Punkte von P gleichen Abstand haben und die Fusspunkte dieser Abstandslothe die Projection bilden. *Jede Strecke auf der Geraden ist ihrer Projection gleich.*

Liegt eine Gerade g in Π, so fällt sie mit ihrer Projection zusammen.

Wenn g nicht zu Π parallel ist, so trifft sie diese Ebene in einem Punkte, den man die *Spur* der Geraden (*Spurpunkt*, Durchgangspunkt, *trace*) nennt. Dieselbe liegt offenbar, weil er mit seiner Projection zusammenfällt, auf der Projection g_1 von g.

Ist g senkrecht zu Π, so reducirt sich die Projection auf den Spurpunkt.

Der spitze Winkel, welchen g mit g_1 einschliesst, ist, wie die Stereometrie lehrt, der kleinste von den Winkeln, welche g mit den durch ihren Spurpunkt in Π gezogenen Geraden bildet, und heisst deshalb *der Neigungswinkel von g gegen* Π; sei derselbe γ; so ist ersichtlich, dass das Verhältniss der Projection A_1B_1 irgend einer auf g gelegenen Strecke AB zur Strecke selbst constant ist, nämlich $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma = \frac{A_1B_1}{AB}, \quad A_1B_1 = AB\cos\gamma.$$

Daraus ergiebt sich, dass *die Orthogonalprojection einer Strecke im Allgemeinen kleiner ist als die Strecke selbst.* Gleichheit findet, wie eben gesagt, statt, wenn AB zu Π parallel ist; es muss dann $\cos\gamma = 1$, also $\gamma = 0$ sein, was zu der Ausdrucksweise berechtigt, dass man den Neigungswinkel einer Linie gegen eine andere Linie oder gegen eine Ebene, zu der sie parallel ist, gleich Null annimmt. (Nr. 44.)

Ist $\gamma = 90^0$, so ergiebt sich $A_1B_1 = 0$, also ein Punkt.

Demnach verhalten sich auch zwei verschiedene Strecken auf derselben Geraden stets so, wie ihre Projectionen; sind z. B. A, B, C drei Punkte auf g, A_1, B_1, C_1 ihre Projectionen, die nach Nr. 9 auf g_1 liegen, so ist

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{AC}{BC};$$

ist C die Mitte von AB, so ist auch C_1 die Mitte von A_1B_1.

Das Verhältniss, in dem eine Strecke durch einen Punkt getheilt wird, insbesondere auch die Halbirung bleibt durch Orthogonalprojection erhalten.

Wie ist es bei der schiefen Parallelprojection, bei der Centralprojection?

11. *Ist g gegeben, so ist auch g_1 gegeben; aber nicht umgekehrt, wenn g_1 gegeben ist, auch g; vielmehr ist g_1 die Projection von doppelt unendlich vielen Geraden, von allen Geraden, die in der längs g_1 auf Π senkrecht errichteten Ebene liegen* (mit Ausnahme der zu Π senkrechten

in dieser Ebene; denn diese haben nur einen Punkt von g_1 zu ihrer Projection).

12. *Ist der Punkt A auf g gelegen, so liegt auch A_1 auf g_1* (Nr. 9); *aber nicht umgekehrt liegt nothwendig der Punkt A, dessen Projection A_1 auf der Projection g_1 von g liegt, auf g.*

Zwei in der Projection sich schneidende Geraden brauchen sich nicht in Wirklichkeit zu schneiden. Das Projectionsloth, das im Schnittpunkt der beiden Projectionen errichtet ist, trifft beide Geraden, aber im Allgemeinen in verschiedenen Punkten. *Scheinbarer Schnittpunkt.*

Giebt es ähnliche Verhältnisse bei der schiefen Parallelprojection, bei der Centralprojection?

13. Es seien g und l zwei parallele Geraden; so sind auch ihre projicirenden Ebenen γ und λ parallel; denn zwei Gerade von γ, nämlich g und das Projectionsloth irgend eines Punktes von g, sind parallel zu zwei Geraden von λ, zu l und dem Projectionslothe irgend eines Punktes von l; also sind auch die Schnitte dieser Ebenen mit Π, d. h. die Projectionen g_1 und l_1 von g und l parallel.

Die Orthogonalprojectionen zweier parallelen Geraden sind ebenfalls parallel; oder: *Parallelismus geht durch Orthogonalprojection nicht verloren.*

Wie ist es bei der schrägen Parallelprojection und bei der Centralprojection?

Umgekehrt aber, wenn die Projectionen zweier Geraden parallel sind, so darf daraus noch nicht auf den Parallelismus der Geraden selbst geschlossen werden.

Weil parallele Geraden gleiche Neigungswinkel gegen Π haben, so sind die Projectionen gleicher paralleler Strecken wieder gleich (und parallel) und die ungleicher paralleler Strecken verhalten sich wie die Strecken selbst.

Schneiden sich zwei Gerade g und l, so ist die Projection ihres Schnittpunktes — den man mit gl bezeichnen kann — der Schnittpunkt der Projectionen g_1 und l_1.

c) Darstellung der Ebene.

14. Jede Ebene E, welche nicht zu Π parallel ist, durchschneidet Π in einer Geraden, die man *die Spurlinie* (Trace, häufig auch Riss, Schnitt) der Ebene nennt und die wir mit s bezeichnen wollen.

Es ist bald ersichtlich, dass alle nicht zu Π parallelen Geraden, die in E liegen, ihre Spurpunkte auf s haben.

Dagegen die zu Π parallelen Geraden in E sind zu s parallel.

15. *Wenn E senkrecht auf Π steht,* so fallen die Projectionsstrahlen aller ihrer Punkte in sie hinein, die Projectionen derselben

liegen auf s, ebenso aber fallen auch die Projectionen aller in E gelegenen (geraden, gebrochenen und krummen) Linien mit s oder mit einem Theile von s zusammen. Man kann in diesem Falle die Spurlinie auch die Projection der Ebene nennen.

16. *Ist aber die Ebene* E *nicht normal* (*senkrecht*) *zu* Π, so hat jeder Punkt in E seine besondere Projection, jede Gerade in E ihre besondere Projection. Denn das in einem Punkte P_1 auf Π errichtete Loth, die in einer Geraden g_1 auf Π errichtete Normalebene trifft E nur in einem einzigen Punkte, bez. in einer einzigen Geraden.

Die Projectionen aller Punkte und Geraden in E bedecken die ganze Projectionsebene, so dass also alle Ebenen, die nicht zu Π normal sind, dieselbe Projection haben und demnach durch ihre Projectionen nicht unterschieden werden können.

17. Ferner wenn P und g in E liegen, P_1 und g_1 ihre Projectionen sind und P_1 liegt auf g_1, so liegt auch P auf g; denn P ist der Punkt, wo das in P_1 errichtete Projectionsloth p die Ebene E trifft, g ist die Gerade, in der die in g_1 errichtete projicirende Ebene γ die Ebene E schneidet; da P_1 auf g_1 liegt, so befindet sich, nach einem bekannten Satz der Stereometrie, p in γ, also auch P auf g.

18. Sind die Projectionen g_1 und l_1 zweier in E gelegenen Geraden g und l parallel, so sind es auch g und l selbst; denn die in g_1 und l_1 errichteten projicirenden Ebenen γ und λ sind parallel, weil sie zwei Richtungen gemein haben, die von g_1 und l_1 und die Projectionsrichtung, also schneiden sie auch parallele Geraden in E ein.

19. *Es sei die Ebene* E *zu* Π *parallel*, so sind alle Geraden in E mit ihren Projectionen parallel, also *alle Strecken, alle Winkel in* E *mit ihren Projectionen gleich, alle Figuren demnach mit ihren Projectionen congruent;* auch krummlinige, an deren Stelle man sich nach der bekannten Methode geradlinige mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten denkt. Ueberlegt man, dass jederzeit die Projectionsstrahlen der Ecken einer geradlinigen Figur und die projicirenden Ebenen ihrer Seiten die Seitenkanten und Seitenflächen eines Prismas, die Projectionsstrahlen der Punkte einer Curve die Kanten eines Cylinders bilden, so ergiebt sich auch die Congruenz einer Figur in einer zu Π parallelen Ebene mit ihrer Projection aus dem bekannten Satze, dass Prismen und Cylinder von parallelen Ebenen in congruenten Figuren durchschnitten werden.

20. Betrachten wir nun wieder *eine nicht zu* Π *parallele Ebene* E, so heben wir unter den Geraden derselben zunächst zwei Arten hervor:

1) die zu Π und deshalb auch zur Spurlinie s parallelen Geraden; dieselben mögen *die Hauptlinien* der Ebene E genannt und mit h be-

zeichnet werden; sie werden offenbar in die Ebene E durch die zu Π parallelen Ebenen eingeschnitten; die s gehört zu ihnen;

2) die zur Spurlinie s und also auch zu den h senkrechten, welche die *Falllinien* der Ebene E genannt und mit f bezeichnet werden mögen.

Durch jeden Punkt in E geht eine Linie h und eine Linie f.

Jede Ebene E, welche Π schneidet, hat einfach unendlich viele Hauptlinien und Falllinien; in einer zu Π parallelen Ebene sind alle (doppelt unendlich vielen) Geraden Hauptlinien.

Die Hauptlinien h sind, weil sie zu Π parallel sind, mit ihren Projectionen h_1 parallel, und da sie auch zu s parallel sind, so *sind auch die Projectionen der Hauptlinien zur Spurlinie parallel.*

Weil s mit ihrer Projection identisch ist, so folgt dies auch aus dem Satze, dass parallele Geraden parallele Projectionen haben.

21. Sei f eine Falllinie in E, S ihr Spurpunkt, der also auf s liegt, P irgend ein anderer Punkt auf ihr; so ist P_1S die Projection f_1. Da nun f aus dem Punkte P in E auf deren Schnittlinie s mit Π senkrecht gefällt ist, PP_1 aber senkrecht auf Π selbst, so ist nach einem bekannten Satze der Stereometrie f_1 senkrecht zu s und also auch zu den h_1.

Wie also die Haupt- und Falllinien in E selbst zu einander normal sind, so sind es auch ihre Projectionen. Oder:

Die von den Haupt- und Falllinien einer Ebene gebildeten rechten Winkel gehen durch Orthogonalprojection nicht verloren.

Gilt dasselbe auch bei den beiden anderen Projectionen?

22. Denken wir uns einen rechten Winkel in einer gegen Π geneigten Ebene, so aber, dass sein einer Schenkel zu Π parallel ist, so ist dieser Schenkel eine Hauptlinie, der andere eine Falllinie in der Ebene; die Projection des rechten Winkels ist mithin wieder ein rechter.

Also erhalten wir folgenden wichtigen Satz:

Die Orthogonalprojection eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel der Projectionsebene parallel ist, ist wieder ein rechter Winkel.

Ein gleichschenkliges Dreieck, von dem die Basis oder die Basishöhe der Projectionsebene parallel ist, projicirt sich demnach wieder gleichschenklig; denn die Halbirung der Basis durch die Höhe bleibt auch erhalten.

Im Allgemeinen verändert ein Winkel, von dem nicht beide Schenkel der Projectionsebene parallel sind (Nr. 19), seine Grösse.

23. Es sei nun ein spitzer Winkel betrachtet, dessen einer Schenkel zu Π parallel ist. Das rechtwinklige Dreieck, das von seinen Schenkeln mit einer Falllinie f seiner Ebene gebildet wird, projicirt sich

nach Nr. 22 wieder als rechtwinkliges Dreieck, also der spitze Winkel wieder als spitzer. Die diesen beiden spitzen Winkeln anliegenden Katheten sind gleich, die Gegenkathete des gegebenen spitzen Winkels grösser als die, welche der Projection gegenüberliegt (Nr. 10), also ist auch der gegebene spitze Winkel grösser als seine Projection. Weil der Nebenwinkel eines stumpfen ein spitzer ist, so erhalten wir folgende zwei Sätze:

Die Orthogonalprojection eines spitzen Winkels, dessen einer Schenkel der Projectionsebene parallel ist, ist ein kleinerer (spitzer) Winkel; die eines stumpfen Winkels, für den dasselbe gilt, ein grösserer (stumpfer) Winkel.

Die Differenz zwischen einem Winkel, dessen einer Schenkel der Projectionsebene parallel ist, und seiner Orthogonalprojection convergirt gegen Null, sowohl wenn der Winkel sich 0^0 (oder 180^0), als wenn er sich 90^0 nähert.

24. Liegt die durch den Scheitel eines Winkels gehende Hauptlinie seiner Ebene innerhalb des Winkels und theilt ihn in zwei spitze Winkel, so werden die Theile und demnach auch der ganze Winkel durch Projection verkleinert; also ein spitzer oder rechter Winkel, innerhalb dessen die durch den Scheitel gehende Hauptlinie liegt, oder, was dasselbe ist, von dem nur ein Schenkel die Π trifft, verkleinert sich.

Liegt hingegen die durch den Scheitel gehende Hauptlinie ausserhalb des Winkels, macht aber mit beiden Schenkeln spitze Winkel, so vergrössert sich der Winkel durch Projection; also ein stumpfer oder rechter Winkel, von dem beide Schenkel die Π treffen, oder beide nicht, wird durch Projection grösser.

Es ist leicht einzusehen, dass man auch umgekehrt in diesen Fällen aus der Projection auf den Winkel selbst schliessen kann; denn ebenso wie sich die durch den Scheitel gehende Hauptlinie zum Winkel selbst verhält, so verhält sich ihre Projection zur Projection des Winkels.

25. Da eine Falllinie f und ihre Projection f_1 beide in demselben Punkte S auf s normal sind (Nr. 21) und bez. in E, Π liegen, so bilden sie die beiden Schenkel eines Neigungswinkels von E gegen Π; der Winkel zwischen f und f_1 ist aber auch der Neigungswinkel von f gegen Π (Nr. 10); also *haben die Falllinien einer Ebene gegen Π dieselbe Neigung* α *wie die Ebene selber.*

Sei g irgend eine andere Gerade in E, P der Punkt, in dem sie eine Falllinie f trifft, S_f und S_g die beiden Spurpunkte von f und g, P_1 die Projection von P, so sind $P_1\,S_f$ und $P_1\,S_g$ die Projectionen f_1 und g_1; $P_1\,S_f$ ist normal zu s, also kleiner als $P_1\,S_g$, mithin der $\sphericalangle P S_g P_1$ kleiner als $\sphericalangle P S_f P_1$, weil die Gegenkathete dieselbe Linie

PP_1 ist; diese Winkel sind aber die Neigungen α_g und $\alpha_f = \alpha$ von g und f gegen Π.

Die Falllinien einer Ebene haben also *unter allen Geraden derselben die grösste Neigung*) gegen* Π und zwar die (α) der Ebene selbst: in der Richtung einer Falllinie einer Ebene wird — bei horizontaler Projectionsebene — ein Körper auf der Ebene herabfallen; daher der Name.

Man kann mithin in einer Ebene E *keine solchen Linien ziehen, die gegen* Π *eine grössere Neigung haben, als die Ebene selbst.* Durch einen Punkt von E kann man offenbar Linien von allen Richtungen und allen Neigungen gegen Π, die in E möglich sind, ziehen. Die Maximalneigung (α) kommt nur einmal vor, nämlich bei der Falllinie, ebenso die Minimalneigung (0) bei der Hauptlinie (jene und diese sind zu einander senkrecht); jede dazwischenliegende Neigung bei zwei Linien, welche mit der Falllinie und also auch mit der Spurlinie und den Hauptlinien gleiche Winkel bilden, wie leicht einzusehen ist.

Nur in Ebenen, die zu Π normal sind, kommen Linien von allen Neigungen gegen Π von 0^0 bis 90^0 vor.

In Ebenen dagegen, welche zu Π parallel sind, also die Neigung Null haben, kommen nur Linien von dieser Neigung vor (Nr. 19).

26. Umgekehrt, *wenn g die Neigung β gegen Π hat, so kann man durch sie nur Ebenen legen, deren Neigung $\gtreqless \beta$ ist;* die Grenzneigungen β und 90^0 sind wieder je durch eine Ebene vertreten, von denen die erstere so sein muss, dass g in ihr Falllinie, also senkrecht zur Spurlinie ist; diese Spurlinie wird also in die Π durch die auf g in ihrem Spurpunkte senkrecht stehende Ebene eingeschnitten und bestimmt mit g die gesuchte Ebene. Dieselbe steht auf der die Maximalneigung gegen Π besitzenden, also zu Π senkrechten Ebene normal. Die Mittelneigungen kommen wieder stets bei je zwei Ebenen vor, deren beide Flächenwinkel durch die beiden Ebenen, die die Grenzneigungen besitzen, halbirt werden.

Ist g parallel zu Π, so gehen durch sie Ebenen von allen Neigungen (0^0 bis 90^0) gegen Π und nur durch zu Π parallele Geraden kann man zu Π parallele Ebenen legen; ist aber g normal zu Π, so haben alle durch sie gelegten Ebenen die Neigung 90^0.

27. Von den Geraden, welche in Π durch die Spur von g gehen, bildet, wie schon gesagt, die Projection g_1 von g den kleinsten Winkel mit g, nämlich den Neigungswinkel β von g gegen Π; den grössten Winkel bildet mit g die zu g_1 senkrechte, nämlich einen rechten; die

---

*) Alle in den nächsten Nrn. betrachteten Neigungswinkel sind als dem ersten Quadranten angehörig anzunehmen.

intermediären Neigungen sind durch je zwei gegen diese und jene gleich geneigte Linien vertreten; wie dies aus der Stereometrie bekannt ist. Die jetzigen Linien sind die Spurlinien der Ebenen der vorigen Nummer: d. h. wenn zwei Linien, welche in Π durch die Spur von g gehen, mit g gleiche Winkel bilden, so sind sie die Spurlinien von zwei Ebenen durch g, welche gegen Π gleich geneigt sind.

28. Man kann den Begriff des Winkels zweier Linien auch auf den Fall, dass sie nicht in derselben Ebene liegen, auf sogenannte windschiefe Geraden, ausdehnen. *Der Winkel zweier windschiefen Geraden ist der, welcher von zwei zu ihnen parallelen sich schneidenden Geraden gebildet wird,* oder (was dasselbe) der entsteht, wenn eine von ihnen parallel verschoben wird, bis sie die andere schneidet. Also kann man den Satz von Nr. 27 erweitern:

Hat eine Gerade g gegen die Ebene Π — denn die bisher als Projectionsebene bezeichnete Ebene kann ja jede beliebige Ebene sein — *die Neigung* β, *so giebt es in* Π *nur Gerade, welche mit g Winkel von* β *bis* 90° *bilden.* Die, welche die Minimalneigung β besitzen, sind zur Projection von g auf Π parallel, die, welche die Maximalneigung 90° haben, auf derselben senkrecht; jede Zwischenneigung ist durch zwei Richtungen in Π vertreten, die mit jeder der beiden eben genannten Richtungen gleiche Winkel bilden.

Ist $\beta = 90^0$, so haben alle Geraden in Π gegen g die Neigung 90°.

29. *Wenn eine Gerade p auf einer Ebene* Π *senkrecht steht, so ist der Winkel (g, p), den eine Gerade g mit p bildet, das Complement des Winkels (g,* Π*), den g mit* Π *bildet; und der Winkel (*E*, p) einer Ebene* E *gegen p ist das Complement des Winkels (*E*,* Π*) dieser Ebene gegen* Π.

Wenn g das Loth p nicht trifft, so werde sie parallel verschoben, bis sie es thut (in P), wodurch die Winkel (g, p) und (g, Π) keine Aenderung erleiden. Sind F und S die Spuren von p und g in Π, so ist FS die Projection g_1 von g; also PSF der ∢ (g, Π), andererseits ersichtlich FPS der ∢ (g, p); sie ergänzen sich zum Rechten, da $p \perp FS$ ist.

Ferner sei Q der Punkt pE, in dem p die Ebene E trifft, so ziehe man durch Q die Falllinie in E gegen Π, deren Spur T und Projection also FT ist; so ist ∢ QTF der Neigungswinkel (E, Π) (Nr. 25); also steht dessen Ebene senkrecht auf E, mithin ist sie die Ebene, welche p auf E projicirt, also QT die Projection von p auf E, demnach TQF der Neigungswinkel (E, p). TQF und QTF sind nun wieder offenbar complementär.

30. *Die Lothe auf zwei Ebenen bilden denselben (spitzen) Winkel, wie die Ebenen selbst.*

Die Ebenen seien E und Φ; sollten die beiden Lothe p und q windschief sein, so wird das eine bis zum Schneiden mit dem andern parallel verschoben: ihr Schnittpunkt sei U, ihre Fusspunkte bez. P und Q, die von ihnen gebildete Ebene steht auf beiden Ebenen E und Φ normal, weil sie je durch ein Loth zu diesen Ebenen geht, also auch senkrecht auf der Schnittlinie EΦ derselben, welche sie in V treffe; demnach ist die Linie EΦ auch normal zu VP und VQ, folglich ist der $\measuredangle PVQ$ der spitze oder stumpfe Neigungswinkel (EΦ). Das Viereck $UPVQ$ hat zwei rechte Winkel bei P und Q, also sind die beiden andern supplementär, mithin der eine spitz, der andere stumpf (oder beide rechte); der spitze Nebenwinkel des letzteren ist folglich dem ersteren gleich, w. z. b. w.

31. Es seien nun g und l zwei — im Allgemeinen windschiefe — Geraden; wir wollen die Winkel der Ebenen durch g gegen l betrachten. Sei Π eine zu l normale Ebene, so ist nach Nr. 29 der Winkel (l, E) einer Ebene E gegen l das Complement von (E, Π).

Soll E durch g gehen, so bewegt sich (E, Π) zwischen (g, Π) und 90^0 (Nr. 26) oder, da (g, Π) und (g, l) auch complementär sind, zwischen 90^0 — (g, l) und 90^0, folglich (l, E) zwischen (g, l) und 0^0.

Man kann also *durch g nicht Ebenen legen, welche mit l einen grösseren Winkel bilden als (g, l).*

Die Ebene durch g, welche mit l den Minimalwinkel 0^0 bildet, ist die (einzige) zu l parallele; sie steht auf der zu l normalen Ebene Π senkrecht. Die Ebene durch g, welche mit l den grösstmöglichen Winkel, nämlich (l, g), bildet, steht auf jener senkrecht, denn sie muss mit Π den kleinstmöglichen Winkel (g, Π) bilden (Nr. 26).

Die Zwischenneigungen sind wieder stets durch je zwei Ebenen vertreten, deren Winkel durch die beiden Ebenen mit der Maximal- und der Minimalneigung gegen l halbirt werden.

Nur wenn g und l selbst einen rechten Winkel bilden, giebt es durch g Ebenen, welche auf l senkrecht sind; sind ja doch alle Geraden einer Ebene, die auf einer Geraden senkrecht stehen, unter 90^0 gegen dieselbe geneigt (Nr. 28).

In diesem Falle kommen unter den Neigungen der Ebenen durch g gegen l alle von 0^0 bis 90^0 vor.

Sind dagegen g und l parallel, also bilden sie den Winkel 0^0, so bilden auch alle Ebenen durch g mit l diesen Winkel, sind mit l parallel, wie bekannt.

32. Es sei Ξ ein Winkel im Raume, die Neigungen seiner Schenkel

gegen die Projectionsebene Π und also auch gegen die zu derselben durch den Scheitel parallel gehende Ebene Π' seien β und γ, und zwar seien diese Winkel positiv oder negativ, je nachdem der betreffende Schenkel auf derselben Seite dieser Ebene liegt, wie die Projectionsebene, oder nicht, also die Projectionsebene trifft, oder nicht. Wir fügen das Projectionsloth des Scheitels hinzu und zwar nur den Halbstrahl, welcher die Projection enthält; so sind diese drei Halbstrahlen (das sind einseitig begrenzte Geraden) die drei Kanten einer dreiseitigen (dreikantigen) Ecke; die drei Kantenwinkel sind ξ, $90^0 - \beta$, $90^0 - \gamma$ (letztere Winkel stumpf, wenn β bez. γ negativ sind). Da die Projectionsebene auf der dritten Kante senkrecht steht, so sind die in ihr sich schneidenden Seitenflächen die projicirenden Ebenen der beiden Schenkel von ξ und die Projection ξ_1 wird gebildet von den Linien, welche Π in diese Ebenen einschneidet; also ξ_1 ist der dem Kantenwinkel ξ gegenüberliegende Flächenwinkel der Ecke.

Nach dem Cosinussatze der sphärischen Trigonometrie ist

$$\cos\xi = \cos(90^0 - \beta) \,.\, \cos(90^0 - \gamma) + \sin(90^0 - \beta) \,.\, \sin(90^0 - \gamma)\cos\xi_1,$$

oder

$$\cos\xi = \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma\cos\xi_1;$$

$$\cos\xi_1 = \frac{\cos\xi - \sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

Haben β und γ gleiches Vorzeichen, wird also der Winkel durch die Ebene Π' nicht durchschnitten oder liegt die durch den Scheitel gehende Hauptlinie der Ebene des Winkels ausserhalb desselben, was dann auch in der Projection geschieht, so ist, wenn ξ_1 spitz ist, auch ξ spitz; ist $\xi_1 = 90^0$, so ist $\xi < 90^0$; ist $\xi \geq 90^0$, so ist $\xi_1 > 90^0$. Wenn hingegen β und γ ungleiches Vorzeichen haben, also die Ebene Π' den Winkel durchschneidet oder die durch den Scheitel gehende Hauptlinie der Ebene desselben in ihn und ihre Projection in seine Projection fällt, so ist, falls ξ_1 stumpf ist, ξ auch stumpf; ist $\xi_1 = 90^0$, so ist $\xi > 90^0$; ist $\xi \leq 90^0$, so ist $\xi_1 < 90^0$.

Wenn einer der beiden Schenkel zu Π parallel ist, also z. B $\gamma = 0$, so geht die obige Formel über in:

$$\cos\xi = \cos\beta\cos\xi_1;$$

mithin sind beide Winkel ξ und ξ_1 stets von gleicher Art.

Wird $\xi = 180^0$ oder 0^0, so wird es ξ_1 auch; es muss dann $\beta = -\gamma$ oder $\beta = \gamma$ sein; aber umgekehrt kann $\xi_1 = 0^0$ oder 180^0 werden, ohne dass dies bei ξ der Fall ist; es ist dann

$$\cos\xi = \sin\beta \sin\gamma \pm \cos\beta \cos\gamma;$$

also in dem einen Falle ist $\xi = \pm (\beta - \gamma)$, in dem andern gleich $180^0 \mp (\beta + \gamma)$.

Die Ebene von ξ muss in beiden Fällen senkrecht zu Π sein, so dass β, γ, ξ alle drei in ihr liegen und die eben erhaltenen Resultate auch geometrisch einleuchten.

33. Haben zwei gleiche Winkel auch gleiche Schenkelneigungen gegen Π und verhalten sie sich zu ihren bezüglichen Ebenen Π' gleichartig (so dass die Vorzeichen dieser gleichen Neigungswinkel entweder beidemal übereinstimmen oder beidemal nicht übereinstimmen), so geht aus der Formel in Nr. 32 hervor, dass auch die Projectionen der Winkel gleich sind.

Dies lässt sich auch ohne die trigonometrische Formel aus der Congruenz der den beiden Winkeln zugehörigen dreiseitigen Ecken entnehmen, welche in den Kantenwinkeln, also auch in den Flächenwinkeln übereinstimmen. In congruenten Ecken sind aber auch die Neigungswinkel von entsprechenden Kanten mit den Gegenflächen gleich; also die Ebenen der beiden gleichen Winkel haben gegen die Projectionslothe ihrer Scheitel gleiche Neigung, mithin auch gegen die zu demselben senkrechte Projectionsebene (Nr. 29).

Wenn also *in zwei Ebenen gleiche Winkel mit gleichen Neigungen der Schenkel gegen die Projectionsebene derart liegen, dass beide Winkel durch die durch den Scheitel zur Projectionsebene parallel geführte Ebene getheilt oder beide nicht getheilt werden, so haben diese Winkel gleiche Projectionen und ihre Ebenen gleiche Neigungen gegen die Projectionsebene.*

34. Nach dieser nothwendigen Abschweifung gehen wir zur Betrachtung der Ebene E zurück und schliessen an Nr. 21. an.

Denken wir uns die Ebene E (entweder um ihren spitzen oder ihren stumpfen Neigungswinkel gegen Π) um ihre Spurlinie s gedreht, bis sie mit der Projectionsebene zusammenfällt. Es ist ersichtlich, dass bei der Drehung alle Gebilde in E in ihrer Grösse und gegenseitigen Lage unverändert bleiben, die Punkte auf s verändern nicht einmal ihre Lage im Raume. Wenn also eine Gerade g in E den Punkt S (auf s) zum Spurpunkt hat, so geht auch die Gerade g_0, mit der sie nach Vollendung der Drehung zusammenfällt, *ihre Umlegung*, durch S und trifft sich dort also mit der Projection g_1 von g. Der Winkel, den g mit s bildet, verändert sich nicht; $\sphericalangle (g, s) = (g_0, s)$.

Im Allgemeinen ist nun $\sphericalangle (g, s)$ und also auch $\sphericalangle (g_0, s)$ von $\sphericalangle (g_1, s)$ verschieden; also fällt g_0 nicht auf g_1. Ist aber g eine Fall-

linie f von E, so ist $\sphericalangle (f, s) = \sphericalangle (f_1, s) = 90^0$ (Nr. 21), mithin ist f_0 mit f_1 identisch.

Die Falllinien einer Ebene kommen also beim Umlegen der Ebene auf ihre Projectionen zu liegen.

35. Sei nun A ein Punkt von E, A_1 seine Projection, A_0 seine Umlegung; f die durch A gehende Falllinie, welche sich auf die durch A_1 gehende Projection f_1 legt. Man sieht demnach, dass die Verbindungslinie der Projection A_1 eines Punktes A in E und seiner Umlegung A_0 mit E senkrecht zur Spurlinie s von E ist. Ist A' der Punkt, wo diese Linie die s trifft, so ist ersichtlich

$$\frac{A'A_1}{A'A_0} = \cos\alpha;\ A'A_0 = A'A_1 \,.\, \sec\alpha,$$

wenn α der Neigungswinkel (E, Π) ist.

Die Umlegung eines Punktes von E *liegt* also *stets auf dem Lothe, das aus der Projection auf die Spurlinie von* E *gefällt ist, und zwar weiter als die Projection.*

Construirt man aus der Entfernung $A_1 A'$ als Kathete und dem Neigungswinkel α als anliegendem Winkel das rechtwinklige Dreieck, so giebt dessen Hypotenuse die Entfernung $A_0 A'$.

Der Fall, wo die Ebene E senkrecht Π ist, schliesst sich wohl der obigen Formel an (A_1 liegt auf s, also $A'A_1 = 0$), aber diese Construction wird illusorisch. Er wird also jetzt ausgeschlossen und später besonders betrachtet (Nr. 54).

A_0 und A_1 liegen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von s, je nachdem die Umlegung um den spitzen oder den stumpfen Winkel (E, Π) geschieht.

Statt das rechtwinklige Dreieck aus einer Kathete und dem anliegenden Winkel zu construiren, kann man es auch (und dies geschieht sogar in den meisten Fällen) aus derselben Kathete $A'A_1$ und der andern AA_1, dem Abstande des Punktes A von der Projectionsebene, construiren, denn derselbe wird meistens aus einer zweiten Projectionsebene (s. zweiten Abschnitt) bekannt sein. Indem man den rechten Winkel $(A'A_1, s)$ benutzt, wird diese Kathete von A' auf s aufgetragen.

Umgekehrt kann man aber auch, wenn die Umlegung A_0 und der Winkel α der Ebene bekannt ist, aus dem Lothe $A_0 A'$ als Hypotenuse und dem spitzen Winkel α die beiden Katheten finden; die anliegende giebt die Entfernung $A'A_1$ und damit die Projection A_1, die andere den Abstand des nach A_0 umgelegten Punktes A in E von Π.

36. Ist h eine Hauptlinie von E, also parallel mit s, so ist natür-

lich auch h_0 parallel mit s; nun ist auch h_1 parallel mit s (Nr. 20), also ist auch h_0 mit h_1 parallel. Stellen wir dies mit dem in Nr. 34 gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir:

Die Umlegung g_0 einer Geraden g in E *und ihre Projection g_1 treffen sich entweder beide auf s oder sind beide mit s parallel.*

37. Es scheint an dieser Stelle geeignet, die sogenannte *perspectivische Ansicht vom Parallelismus* einzuführen. Wenn in einer Ebene um einen festen Punkt eine Gerade sich bewegt, also das Gebilde beschreibt, welches man einen Strahlbüschel nennt, so hat jeder Strahl mit einer festen Geraden der Ebene, die den Punkt nicht enthält, einen Punkt gemein, mit Ausnahme eines einzigen Strahls, nämlich des zur festen Geraden parallelen. Dieser hat mit der festen Geraden statt eines Punktes die Richtung gemein. Man hat nun folgende Beobachtung gemacht: In allen auf die Lage bezüglichen Sätzen kann man unbeschadet der Richtigkeit das Wort Punkt durch Richtung ersetzen, und bei gewissen Umwandlungen — wie z. B. ganz besonders wenn die Punkte und Geraden einer Ebene aus einem Centrum auf eine andere Ebene projicirt werden*) — treten, während im Allgemeinen jeder Punkt wieder in einen Punkt übergeht, bisweilen an Stelle von Punkten Richtungen und von Richtungen Punkte, d. h. Gerade der einen Ebene, die einen gemeinsamen Punkt haben, verwandeln sich in parallele Geraden, also in Gerade mit gemeinsamer Richtung und umgekehrt. Man hat deshalb an Stelle von Richtung das Wort Punkt gesetzt, und indem der gemeinsame Punkt des beweglichen Strahls des obigen Büschels mit der festen Geraden, je mehr der Strahl sich der Parallellage nähert, sich immer weiter nach der einen Seite entfernt und nachdem er bei der Parallellage (und nur bei derselben) verloren gegangen, auf der andern Seite wieder erscheint und zurückkommt, kann man diesen „uneigentlichen" gemeinsamen Punkt, den man zwei parallelen Geraden anstatt der gemeinsamen Richtung zuschreibt, nur in unendliche Entfernung versetzen, und zwar ebensogut auf der einen Seite der Geraden als auf der andern. Wie eine Gerade nur eine Richtung, so kann sie also auch nur einen unendlich fernen Punkt haben. Es giebt dann natürlich in einer Ebene so viele unendlich ferne Punkte als sie Richtungen enthält, folglich als es Strahlen in einem Strahlbüschel giebt, mithin einfach unendlich viele, so viele, wie eine gerade Linie Punkte enthält.

Man ersieht, dass nach dieser Ansicht die Doppelsätze: „Zwei

---

*) Weil gerade die Centralprojection (Perspective) zu der zu schildernden Ansicht vorzugsweise geführt hat, ist dieselbe die perspectivische genannt worden.

Gerade in derselben Ebene haben einen Punkt oder die Richtung gemein“ und „Zwei Gerade mit gemeinsamem Punkt oder gemeinsamer Richtung bestimmen eine Ebene“ in die einfachen Sätze übergehen: „Zwei Gerade derselben Ebene haben einen Punkt gemein“ und „Zwei Gerade mit gemeinsamem Punkt bestimmen eine Ebene.“

38. Zwei Ebenen haben entweder eine Gerade oder die „Stellung“ gemein d. h. sie sind parallel; in Bezug auf Gerade und Stellung gilt nun ähnliches wie für Punkt und Richtung; man hat daher Stellung ersetzt durch „unendlich ferne Gerade“ und schreibt also jeder Ebene eine (einzige) unendlich ferne Gerade zu. Der obige Doppelsatz verwandelt sich daher in den einfachen: Zwei Ebenen haben jederzeit eine Gerade gemein.

Parallele Ebenen haben also ihre unendlich ferne Gerade gemein.

Jede Gerade hat mit einer Ebene, in der sie nicht liegt, einen Punkt gemein oder sie ist ihr parallel d. h. sie ist einem System von Parallelen in der Ebene parallel, ihre Richtung ist in der Ebene enthalten: sie hat also mit jenen parallelen Geraden die Richtung, mithin den unendlich fernen Punkt gemein, also hat sie ihn auch mit der Ebene, in der diese Geraden liegen, gemein.

Folglich geht der Doppelsatz wieder in den einfachen über: Jede Gerade hat mit einer Ebene, welcher sie nicht angehört, einen Punkt gemein.

Zu jeder Geraden einer Ebene kann man in jeder zu der Ebene parallelen Ebene Parallele ziehen; also jede Richtung einer Ebene ist auch in jeder zu derselben parallelen Ebene enthalten; oder ihre unendlich fernen Punkte hat eine Ebene mit allen ihr parallelen gemein; diese Punkte liegen also auf der gemeinsamen unendlich fernen Geraden; was eben nichts anderes heisst als: jede Ebene, die dieselbe Stellung hat, wie die betrachtete Ebene, besitzt auch alle ihre Richtungen. Wenn man in Folge dessen sagt: Eine Gerade, welche einer Ebene parallel ist, trifft deren unendlich ferne Gerade (weil sie mit einem System paralleler Geraden in der Ebene parallel ist), so ist dies, da sie ja in einer zu der Ebene parallelen Ebene liegt, nun blos ein specieller Fall des Satzes: Eine Gerade, die in der einen zweier sich schneidender Ebenen liegt, trifft die andere auf der Schnittlinie.

39. Unendlich ferne Punkte und Geraden giebt es also im Raume so viele, als es Richtungen und Stellungen giebt, also so viele als durch einen Punkt Gerade und Ebenen gehen, je doppelt unendlich viele; mithin so viele als Punkte und Gerade in einer Ebene liegen. Dies stimmt wieder mit der Ansicht, nach der alle unendlich fernen Punkte

des Raumes in einer Ebene gedacht werden, der unendlich fernen Ebene des Raumes, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen wird.

40. Zeigen wir noch an einigen ändern Beispielen, wie durch diese perspectivische Ansicht Vereinfachungen eintreten, gewisse Sätze sich unter andere als specielle Fälle subsumiren.

Eine Gerade parallel zu einer andern führen heisst jetzt: sie durch deren unendlich fernen Punkt ziehen; eine Ebene parallel zu einer Geraden oder Ebene construiren heisst: sie durch den unendlich fernen Punkt der Geraden, bez. die unendlich ferne Gerade der Ebene legen.

Der Satz: „Durch einen Punkt ist zu einer Geraden eine und nur eine Parallele möglich" subsumirt sich unter den Satz: „Durch zwei Punkte ist eine und nur eine Gerade möglich."

Die Sätze:

Durch einen Punkt lässt sich zu zwei (nicht parallelen) Geraden,

durch eine Gerade lässt sich zu einer andern Geraden, und

durch einen Punkt lässt sich zu einer Ebene jederzeit eine und nur eine parallele Ebene legen

sind nun specielle Fälle der beiden Sätze:

Durch drei nicht in gerader Linie befindliche Punkte und

durch eine Gerade und einen ihr nicht angehörenden Punkt lässt sich jederzeit eine und nur eine Ebene legen.

Die Sätze: Eine Parallele zu einer Ebene, die mit ihr einen Punkt gemein hat, liegt ganz in ihr und:

Eine Parallele zu einer Ebene liegt ganz in der Ebene, die durch einen Punkt auf ihr parallel zur Ebene geführt ist,

sind specielle Fälle des Satzes: Eine Gerade, die mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, liegt ganz in ihr.

41. Der Satz: Wenn durch eine Parallele zu einer Ebene eine andere Ebene gelegt wird, so ist die Schnittlinie beider Ebenen der gegebenen Linie parallel

ist ein specieller Fall des Satzes: Wenn durch eine Gerade, die eine Ebene schneidet, eine andere Ebene geht, so geht die Schnittlinie beider Ebenen durch den Schnittpunkt der Geraden und der ersteren Ebene.

Die Sätze: Werden durch zwei parallele Linien Ebenen gelegt, so ist ihre Schnittlinie den beiden parallelen Linien parallel; oder: Wenn eine Gerade in einer Ebene mit einer in einer andern Ebene parallel ist, so sind sie beide der Schnittlinie der Ebenen parallel, sind in folgendem enthalten: Gehen durch zwei sich schneidende Linien Ebenen, so geht ihre Schnittlinie durch den Schnittpunkt jener; oder: Ein Punkt, der auf zwei Ebenen liegt, gehört ihrer Schnittlinie an;

oder: Wenn eine Gerade in einer Ebene eine Gerade in einer andern Ebene trifft, so kann es nur auf der Schnittlinie geschehen.

In dem Doppelsatze:

Die drei Schnittlinien von drei Ebenen laufen in einen Punkt zusammen oder sind parallel

ist der zweite Theil nun überflüssig, weil im ersten enthalten.

Der Satz: Wenn zwei Ebenen zwei Richtungen gemein haben, also wenn die Schenkel eines Winkels in der einen Ebene mit denen eines Winkels in der andern parallel sind, so sind die beiden Ebenen parallel und haben alle Richtungen gemein

subsumirt sich unter den Satz:

Haben zwei Ebenen zwei Punkte gemein, so haben sie deren ganze Verbindungslinie gemein.

42. Alle Senkrechten auf einer Ebene α sind parallel, also haben sie denselben unendlich fernen Punkt A_∞, durch den aber auch die zu der Ebene α senkrechten Ebenen gehen, da sie den senkrechten Geraden parallel sind.

Weil zwei Punkte eine Gerade, ein Punkt und eine Gerade eine Ebene bestimmen, so geht also durch jeden Punkt eine und nur eine senkrechte Gerade, durch eine Gerade eine und nur eine senkrechte Ebene zu einer gegebenen Ebene.

Zwei zu α senkrechte Ebenen haben eine zu α senkrechte Schnittlinie; denn beide gehen durch A_∞, also thut es auch die Schnittlinie.

Steht β senkrecht α, so muss jede zu α senkrechte Gerade, die durch einen eigentlichen Punkt von β geht, ganz in β liegen, weil sie mit ihr dann zwei Punkte gemein hat.

Alle Ebenen, die auf derselben Geraden a senkrecht stehen, haben, weil sie parallel sind, dieselbe unendlich ferne Gerade. Folglich geht durch jeden Punkt eine und nur eine zu der Geraden senkrechte Ebene.

43. Die Parallelprojection wird nach der perspectivischen Ansicht ein specieller Fall der Centralprojection, d. h. alle Sätze der letzteren, die nicht gerade ein endliches Centrum voraussetzen, gelten auch für die Parallelprojection.

Ferner ist nun, wenn die Punkte und Geraden einer Ebene aus einem endlichen Centrum auf eine andere Ebene projicirt werden, durchweg richtig, dass jeder Punkt, jede Gerade sich wieder in einen Punkt, eine Gerade projicirt (Nr. 37), überhaupt haben nun alle Punkte und alle Geraden bei der Centralprojection Projectionen; sind die Projectionsstrahlen, bez. projicirenden Ebenen zur Projectionsebene parallel, so sind die Projectionen uneigentlich, unendlich fern (Nr. 3).

Bei der Parallelprojection hat jeder endliche Punkt wieder einen endlichen Punkt zur Projection (Nr. 6), und jeder unendlich ferne Punkt wieder einen unendlich fernen Punkt; denn der Parallelismus von Geraden geht durch Parallelprojection nicht verloren, was man ähnlich wie bei der Orthogonalprojection (Nr. 13) einsieht. —

Jede Gerade g hat nach dieser Auffassung einen Spurpunkt in der Projectionsebene Π; ist sie zu Π parallel, so ist er der unendlich ferne Punkt von g_1 (Nr. 10). Die Hauptlinien einer Ebene haben also ihre Spurpunkte alle im unendlich fernen Punkte der Spurlinie der Ebene (Nr. 14) und in dem Doppelsatze von Nr. 36 kann der zweite Theil wegfallen.

Jede Ebene hat nun eine Spurlinie in Π; ist sie zu Π parallel, so ist dieselbe die unendlich ferne Gerade von Π.

44. Entfernt sich der Schnittpunkt einer um einen festen Punkt beweglichen Geraden mit einer festen Geraden immer mehr, wie in Nr. 37, so wird ihr Winkel immer kleiner und wird Null, wenn der Parallelismus eintritt; und wie man aus Nr. 10 ersieht, hat man in der That das Recht, den Winkel zweier parallelen Geraden gleich Null anzunehmen.

Ebenso wird der Winkel einer um einen festen Punkt beweglichen Geraden gegen eine Ebene immer kleiner, je weiter sich der Schnittpunkt entfernt, und Null, wenn die Gerade mit der Ebene parallel wird.

Soll eine um eine feste Gerade bewegliche Ebene mit einer festen Ebene parallel werden können, so muss die feste Gerade der festen Ebene parallel sein (Nr. 26); dann bleibt die Schnittlinie mit der festen Ebene mit sich (und mit der festen Geraden) parallel, und je weiter sie sich entfernt, desto kleiner wird der Neigungswinkel der beiden Ebenen; wenn der Parallelismus erreicht, die gemeinsame Linie ins Unendliche gelangt, also an ihre Stelle die gemeinsame Stellung getreten ist, wird er Null, wie sich noch an einer späteren Formel (Nr. 51) bestätigen wird.

Von diesem dem Parallelismus entsprechenden Winkel Null ist schon mehrfach, besonders in Nr. 25 bis 32 Gebrauch gemacht worden.

45. Wir kommen wieder auf *die beiden ebenen Systeme in* Π zurück, *von denen das eine aus den Umlegungen, das andere aus den Projectionen der Punkte und Geraden einer Ebene* E *besteht. Jedem Punkte* P_0, *jeder Geraden* g_0 *des einen Systems entspricht ein Punkt* P_1, *bezw. eine Gerade* g_1 *des andern Systems*, welche beide demselben Punkte P, bezw. derselben Geraden g in E entsprechen, *und umgekehrt. Liegt* P_0 *auf* g_0, *so liegt* P auf g und P_1 *auf* g_1; *und umgekehrt, liegt* P_1 *auf* g_1, *so muss*

P auf g (Nr. 17), also auch P_0 *auf* g_0, *liegen*, weil die Umlegung daran nichts ändert.

Entsprechende Geraden g_0 *und* g_1 *treffen sich auf* s (Nr. 36 und 43); *die Verbindungslinien entsprechender Punkte* P_0 *und* P_1 *sind* alle auf s normal (Nr. 35), also *unter einander parallel.*

Diese eigenthümliche Beziehung der beiden ebenen Systeme nennt man *Affinität* (Verwandtschaft)*).

Die Umlegung einer Ebene und ihre Projection sind also affin.

Die Spurlinie s der Ebene heisst die *Affinitätsaxe;* alle ihre Punkte entsprechen sich selber.

Die parallelen Verbindungslinien entsprechender Punkte, welche den Falllinien von E und also (Nr. 34) sich selbst entsprechen, heissen *Affinitätsstrahlen.*

46. Denken wir uns zwei ebene Systeme ähnlich wie oben auf einander bezogen, nur dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte nicht einen unendlich fernen, sondern einen beliebigen im Allgemeinen endlichen Punkt gemein haben, so erhält man die *Collinearität oder Homologie,* von der also nach der perspectivischen Ansicht die Affinität ein besonderer Fall ist.

Wird bei der schrägen Parallelprojection dieselbe Umlegung mit einer Ebene vorgenommen, wie eben bei der orthogonalen, so ergiebt sich gleichfalls Affinität, aber nicht mit zu s normalen Affinitätsstrahlen; bei der Centralprojection dagegen erhält man Collinearität.

47. *Kennt man bei der Affinität die Axe* s, *die Richtung der Affinitätsstrahlen* (welche in unserem Falle normal zur Axe ist) *und ein Paar entsprechender Punkte* A_0 *und* A_1 — wobei also in unserem Falle A_0 stets weiter von der Axe s entfernt ist als A_1 —, *so ist die ganze Affinität bestimmt,* d. h. man kann zu jedem Punkte, jeder Geraden des einen ebenen Systems den entsprechenden Punkt, die entsprechende Gerade im andern construiren (Fig. 1). Es sei X_0 ein beliebiger zweiter Punkt des ersteren Systems — des hier durch die Umlegung entstandenen —, so findet man X_1 als den Schnitt des Affinitätsstrahls durch X_0, also des Loths aus X_0 auf s mit der Geraden, welche der A_0X_0 entspricht, mithin durch X_1 geht und sich mit A_0X_0 auf s begegnet (bezw. zu s parallel ist, wenn das bei A_0X_0 der Fall ist). In umgekehrter Weise findet man aus X_1 den Punkt X_0. Soll zu einer Geraden x_0 die entsprechende x_1 gesucht werden, so suche man den entsprechenden Punkt irgend eines Punktes auf x_0 und verbinde ihn

*) Da in diesem Buche keine Gelegenheit ist, die allgemeine Affinität und Collinearität kennen zu lernen, so ist der den speciellen Fall charakterisirende Zusatz weggelassen.

mit dem Schnittpunkte $x_0 s$, bezw. zieht durch ihn zu s die Parallele, wenn $x_0 \parallel s$ ist; ebenso findet man x_0 aus x_1.

48. Dass die Affinität bestimmt sein musste, wenn die Axe und ein Paar entsprechender Punkte A_0, A_1 (ausser der hier von selbst gegebenen Affinitätsstrahlenrichtung) bekannt ist, erhellt auf der Stelle; denn ist wieder A' der Punkt $(A_0 A_1, s)$ so geben $A' A_0$ $(= A'A)$ als Hypotenuse und $A_1 A'$ als eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks in der andern Kathete AA_1 den Abstand des Punktes A, dessen Projection A_1 ist, von Π. Nun giebt es zwar zwei Punkte zu beiden Seiten von Π; jeder von ihnen liefert mit s eine Ebene; aber es ist ersichtlich, dass die aus den Umlegungen dieser beiden Ebenen entstandenen ebenen Systeme identisch sind; zwei Punkte, in den beiden Ebenen, welche dieselbe Projection haben, kommen stets nach der Umlegung an dieselbe Stelle.

49. Besitzt man also ein Paar entsprechender Punkte auf Grund der Construction von Nr. 35 (mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks), so kann man auf die jetzt gegebene Weise zu jedem weitern Punkte, zu jeder Geraden der Umlegung oder der Projection den entsprechenden Punkt, die entsprechende Gerade der Projection, bezw. der Umlegung construiren.

Man kann aber auch — und dies wird sich für die graphische Ausführung empfehlen — durchweg mit den rechtwinkligen Dreiecken arbeiten, weil man, besonders wenn aus der Umlegung die Projection zu construiren ist, dann gleich die Abstände der Punkte von der Projectionsebene erhält, was für die zweite Projectionsebene (s. nächster Abschnitt) wichtig sein wird, und die Affinität als — nothwendige — Controlle benutzen.

50. In der Ebene E sei ein *Kreis* K (Fig. 2, wo der Kreis mit E umgelegt ist) gegeben; wir wollen *seine orthogonale Projection* K_1 betrachten. Die Durchmesser des Kreises projiciren sich in Linien, welche durch die Projection C_1 des Centrums C ebenfalls halbirt werden; dieselben heissen auch für die Curve K_1 *Durchmesser*, und C_1 das *Centrum* von K_1. Aber die Durchmesser von K_1 sind nicht gleich, weil sie verschiedene Neigungen gegen Π haben; die beiden zu einander senkrechten Durchmesser a und b von K, welche zu der Spurlinie s parallel, bezw. normal sind, haben, weil sie die kleinste und grösste Neigung gegen Π besitzen, zu Projectionen den grössten und kleinsten Durchmesser von K_1; dieselben sind nach Nr. 21 ebenfalls zu einander senkrecht: sie heissen *die Axen der Kreisprojection.*

Sonst projiciren sich zwei zu einander normale Durchmesser nicht wieder zu einander normal; aber eine andere Eigenschaft bleibt er-

halten. Von zwei zu einander normalen Durchmessern eines Kreises halbirt jeder die dem andern parallelen Sehnen, und wird in seinen Endpunkten von zu dem andern parallelen Tangenten berührt. Man nennt deshalb diese Durchmesser *conjugirte*. Da Parallelismus und Halbirung durch Orthogonalprojection nicht verloren gehen, so gilt auch für die Durchmesser der Kreisprojection, welche von conjugirten Durchmessern des Kreises herrühren, dass jeder die dem andern parallelen Sehnen halbirt. Und da die Tangente einer Curve definirt wird als die Verbindungslinie zweier unendlich naher Punkte der Curve, so ist zunächst ersichtlich, dass die Projection der Tangente einer Curve Tangente an die Projection ist; ferner dass die Tangenten an die Kreisprojection in den Endpunkten des einen von zwei Durchmessern, welche Projectionen zweier conjugirter Kreisdurchmesser sind, dem andern parallel sind.

Kurz: *Conjugirte Durchmesser eines Kreises projiciren sich wieder als conjugirte Durchmesser.*

Dass aber die Tangente auf dem nach ihrem Berührungspunkte gehenden Durchmesser senkrecht steht, geht nicht vom Kreise auf seine Projection über.

Welche der genannten Eigenschaften der Kreisprojection gilt noch bei der schrägen Parallelprojection, bezw. bei der Centralprojection? Die Projection des Kreises ist die Curve, welche Ellipse genannt wird.

In Folge der Affinität ist ersichtlich, dass jede Tangente des umgelegten Kreises sich mit der Tangente an die Projection im entsprechenden Punkte, weil sie entsprechende Geraden sind, auf der Spurlinie trifft (bez. beide zu derselben parallel sind); was für die Construction der Tangente wesentlich ist. Sollte der Begegnungspunkt mit s unbequem liegen, so würde man zur Bestimmung der Tangente noch von einem beliebigen zweiten Punkte die Projection construiren.

Zur Construction mag noch empfohlen werden: die Curve in einer (durch Spurlinie und Neigungswinkel) gegebenen Ebene zu zeichnen, deren Projection ein Kreis ist.

Sie ist ebenfalls eine Ellipse; aber sie hat ihre kleinere Axe parallel zur Spurlinie, die grössere senkrecht darauf.

51. Es sei F eine geschlossene Figur in E und zugleich ihre Flächenzahl; wir theilen diese Figur durch gleich weit von einander abstehende Hauptlinien in Trapeze; diese Hauptlinien haben, soweit sie innerhalb liegen, die Längenzahlen $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_n$; die des constanten Abstandes sei h, so ist

$$F = h\left(\frac{g_0 + g_1}{2} + \frac{g_1 + g_2}{2} + \cdots + \frac{g_{n-1} + g_n}{2}\right).$$

Die Projection F_1 von F wird durch die Projectionen der Hauptlinien ebenfalls in Trapeze getheilt; diese Grundlinien haben in der Projection dieselbe Länge wie in der Ebene E; die Höhen der Projectionstrapeze haben die Längenzahl h cos α, wo α der Neigungswinkel (E, Π) ist, weil diese Höhen in E auf Falllinien liegen; also ist

$$F_1 = h \cos \alpha \left(\frac{g_0 + g_1}{2} + \frac{g_1 + g_2}{2} + \cdots + \frac{g_{n-1} + g_n}{2}\right) = F \cos \alpha.$$

Ist die Figur von einer krummen Linie umschlossen, so erhält man, indem man in der bekannten Weise die theilenden Linien unendlich nahe rücken und ihren constanten Abstand unendlich klein werden lässt, dieselbe Beziehung zwischen der Flächenzahl der Figur und der ihrer Projection.

Das Verhältniss der Flächenzahl der Projection einer ebenen Figur zu der der Figur selbst ist gleich dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebene der Figur gegen die Projectionsebene.

Die Flächenzahl der Projection eines Kreises vom Radius r ist also $r^2 \cos \alpha \,.\, \pi$; ist nun a die Längenzahl der halben grossen, b die der halben kleinen Axe der Projection, so ist $a = r, b = r \cos \alpha$, weil jene Axe die Projection einer Hauptlinie, diese die einer Falllinie der Kreisebene ist; die Flächenzahl der Kreisprojection ist demnach $a b \pi$.

Wenn die Ebene einer Figur zur Projectionsebene parallel ist, so projicirt sich die Figur congruent (Nr. 19); also muss $\cos \alpha = 1$, $\alpha = 0$ sein. (Man sehe Nr. 44.)

52. Ein Dreieck ABC so zu projiciren, dass seine Projection einem gegebenen Dreiecke $A'B'C'$ ähnlich wird. Es kommt also darauf an, die Spurlinie und den Neigungswinkel der Ebene von ABC zu finden. Es sei $A_0B_0C_0$ in Π dem gegebenen Dreiecke ABC congruent und werde als Umlegung von ABC betrachtet. B_0C_0A'' werde ähnlich $B'C'A'$ construirt, darauf durch A_0 und A'' der Kreis gelegt, der sein Centrum auf B_0C_0 hat; er schneide B_0C_0 in D_0 und E. Die Dreiecke A_0D_0E und $A''D_0E$ sind bei A_0 bezw. A'' rechtwinklig: also ist $A_0ED_0 > A''ED_0$ und $A_0D_0E < A''D_0E$ oder umgekehrt. Gesetzt, es sei das erste der Fall, so mache man $A_0ED_1 = A''ED_0$, wobei D_1 auf A_0D_0 fällt. Nimmt man A_0E als Affinitätsaxe (Spurlinie), so dass die Affinitätsstrahlen mit $A_0D_1D_0$ parallel sind, betrachtet D_1 als Projection von D, dem also D_0 als Umlegung zugehört, und construirt die in der Affinität B_0, C_0 entsprechenden Punkte B_1, C_1 (A_1 und A_0 fallen zusammen), so ist $A_1B_1C_1 \sim A''B_0C_0 \sim A'B'C'$. Der Winkel α der gesuchten Ebene gegen Π ist gegeben durch:

$$\cos\alpha = \frac{A_1D_1}{A_0D_0}.$$

53. Mit Hilfe der Umlegung mag noch eine Vergleichung der Grösse eines Winkels und seiner Projection vorgenommen werden. Wir nehmen an, dass beide Schenkel des Winkels die Spurlinie seiner Ebene treffen; dasselbe geschieht dann auch in der Projection. In den anderen Fällen ersetzt man, um sie auf diesen Fall zurückzuführen, den Winkel durch seinen Scheitel- oder Nebenwinkel. Die Umlegung der Winkelebene geschehe stets um den spitzen Neigungswinkel, so dass Umlegung und Projection auf derselben Seite liegen.*)

1) Bilden die Schenkel des Winkels mit der durch den Scheitel gehenden Hauptlinie, also auch mit der Spurlinie zwei spitze Winkel oder einen rechten und einen spitzen Winkel (in Wirklichkeit und in Projection, Nr. 24), so ist die Projection des Winkels stets grösser als der Winkel selbst (vergl. ebenda), wie aus der Lage der Umlegung und der Projection des Scheitels auf der Stelle einleuchtet. Sei φ der Winkel, φ_1 seine Projection; denken wir uns den Neigungswinkel α der Ebene von 0^0 bis 90^0 wachsend, so wächst, wenn φ constant ist, φ_1 von φ bis 180^0; wenn aber φ_1 constant ist, fällt φ von φ_1 bis 0^0; nur wird beim Neigungswinkel 90^0 φ_1 nicht mehr Projection eines in der senkrechten Ebene befindlichen Winkels genannt werden können.

2) Der eine der beiden Schenkel bilde (in Wirklichkeit und in Projection) mit der Spurlinie einen stumpfen Winkel: seien D und E die Begegnungspunkte der Schenkel mit der Spurlinie, F_0 und F_1 Umlegung und Projection des Scheitels; so trifft F_0F_1 die Spurlinie ausserhalb DE in F'. Wir nehmen an, φ sei constant, also F_0 fest F_1 beweglich und zwar offenbar nur zwischen F' und F_0; so sind zwei Fälle zu unterscheiden: der zweite Schnittpunkt F'' des Kreises durch DEF_0 mit F_0F' liegt zwischen F' und F_0 oder nicht. Im zweiten Falle ist $\varphi_1 = DF_1E$ stets $< \varphi = DF_0E$, und während α von 0^0 bis 90^0 wächst, fällt φ_1 von φ bis 0^0. Im ersten Falle hingegen (Fig. 3) ist φ_1, so lange F_1 zwischen F_0 und F'' sich bewegt, $> \varphi$; der durch D und E gelegte Kreis, welcher $F'F_0$ berührt, giebt in seinem Berührungspunkte F''', der durch $F'F'''^2 = F'D \,.\, F'E$ bestimmt ist, die Lage von F_1 an, bei welcher φ_1 das Maximum erreicht; zwei gleich weit von F''' abstehende Punkte gehören gleichen Winkeln φ_1 an; ist F_1 in F'', so ist $\varphi_1 = \varphi$; liegt F_1 zwischen F''

*) Sonst wird man gerade, um Collision zu vermeiden, die Umlegung um den stumpfen Winkel vorziehen.

und F', so ist $\varphi_1 < \varphi$. Also während α von 0 bis 90° wächst, wächst φ_1 von φ bis zu dem Maximalwerth $DF'''E$ und fällt, zunächst die eben erhaltenen Werthe bis φ nochmals passirend, bis 0°.

Umgekehrt, ist φ_1 constant, so sei F^{IV} der zweite Schnittpunkt des Kreises DF_1E mit $F'F_1$. Liegt F^{IV} zwischen F' und F_1, so ist, weil F_0 jenseits F_1 liegen muss, φ stets $< \varphi_1$ und fällt von φ_1 bis 0°. Liegt aber F^{IV} jenseits F_1, wo dann auch F''' liegen muss; so wächst φ zunächst von φ_1 bis zu einem Maximalwerthe $DF'''E$ und fällt dann, zunächst die erhaltenen Werthe bis φ_1 rückwärts durchlaufend, bis 0°; hinsichtlich dieses Winkels 0° gilt natürlich dasselbe wie in 1).

54. *Steht eine Ebene* E *senkrecht auf* Π, so reducirt sich die ganze Projection auf die Spurlinie: es kommt also durch Umlegung und Projection keine Affinität zu Stande. Die rechtwinkligen Dreiecke, welche zur Construction der Umlegung von Punkten dienen (Nr. 35), schrumpfen, weil die in Π befindliche Kathete Null ist, in gerade Linien zusammen; um *die Umlegung* zu bewirken, ist es nothwendig, die Abstände der Punkte von Π zu kennen. Kennt man diese — und sobald mit zwei Projectionsebenen gearbeitet wird, sind sie bekannt —, so ist die Umlegung einer Figur in zu Π senkrechter Ebene wesentlich einfacher, als in zu Π schräger Ebene: man hat nur diese Abstände in den Projectionen der Punkte, die ja auf der Spurlinie liegen, senkrecht zu dieser Spurlinie zu errichten; deshalb ist, wenn die Ebene einer Figur auf einer der Projectionsebenen, in welche letztere projicirt wird (zweiter Abschnitt), senkrecht steht, die Umlegung stets in diese Projectionsebene vorzunehmen.

Kennt man z. B. die Projection einer Strecke und die Abstände der Endpunkte von Π, so erhält man durch die Umlegung der projicirenden Ebene *die wahre Länge der Strecke und ihren Neigungswinkel gegen ihre Projection, d. i. gegen die Projectionsebene* (Nr. 10).

55. Statt eine Ebene E um ihre Spurlinie s in die Projectionsebene Π umzulegen, empfiehlt es sich oft — besonders wenn der Raum auf dem Zeichenblatte es erfordert —, sie *um eine Hauptlinie h in die durch dieselbe gehende Parallelebene* Π′ *zu* Π *umzulegen:* Π′ ist dann gewissermassen eine verschobene Projectionsebene; man zeichnet aber in Π selbst und zwar die Projection der Umlegung in Π′, welche ja mit derselben congruent ist und deshalb auch der Kürze halber selbst Umlegung genannt wird. An Stelle der Abstände eines umzulegenden Punktes P von Π und von s treten dann die (gewöhnlich kleineren) Abstände von Π′ und von h und an Stelle des Abstandes der Projection P_1 von s tritt der von h_1.

Steht die umzulegende Ebene auf Π normal, so ist h_1 mit s identisch. Will man die *wahre Länge einer Strecke* ermitteln, so wird die projicirende Ebene in die durch den einen Endpunkt gehende Π′ umgelegt: es tritt dann an Stelle des Trapezes, das von der Projection der Strecke, den umgelegten Abständen der Endpunkte und der umgelegten Strecke selbst eingeschlossen ist, ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Projection und die *algebraische* Differenz der Endpunktsabstände sind und dessen Hypotenuse die umgelegte Strecke ist. Diese Construction führt besonders dann zur Raumersparniss, wenn die Endpunkte auf derselben Seite von Π liegen.

Es ist nicht schwer zu erkennen, dass man auch hier den Neigungswinkel der Geraden gegen die Π (oder, was dasselbe, gegen Π′) gleichzeitig findet.

56. Ist eine Gerade g zu einer Ebene E im Punkte F normal, so ist sie zu allen durch F in E gezogenen Geraden normal, also auch zu der durch F gehenden Hauptlinie h; der rechte Winkel (g, h) bleibt, weil der eine Schenkel zur Projectionsebene parallel ist, erhalten (Nr. 22); g_1 ist demnach senkrecht zu h_1, mithin auch zu den Projectionen aller Hauptlinien und zur Spurlinie von E.

Wenn also eine Gerade g zu einer Ebene E *normal ist, so ist ihre (Orthogonal-) Projection g_1 zur Spurlinie s und den Projectionen der Hauptlinien von* E *normal.*

Da jede g_1 in Π Projection von (doppelt) unendlich vielen Geraden ist, so *ist ersichtlich dieser Satz nicht umgekehrt richtig.*

Die durch den Fusspunkt F gehende Falllinie f von E hat, weil f_1 durch P_1 geht und zu s normal ist, dieselbe Projection wie g; liegen ja auch ersichtlich beide in derselben zu Π normalen Ebene.

Kennt man den Neigungswinkel α und die Spurlinie s einer Ebene E, ferner die Projection P_1 eines Punktes P und den Abstand desselben von Π, so ist leicht sein Abstand von E zu ermitteln; denn ist F der Fusspunkt dieses Abstandslothes und S der des von P_1 auf s gefällten Lothes, so sind die für die Construction des (bisweilen verschlungenen) Vierecks PP_1SF nothwendigen Stücke bekannt (Fig. 4).

57. a) Steht E normal auf Π, so ist der Fusspunkt des aus P_1 auf die Spurlinie s gefällten Lothes die Projection des Fusspunktes des aus P auf E gefällten Lothes (im anderen Falle ersichtlich nicht) und jenes Loth ist diesem gleich, weil letzteres parallel zu Π ist.

b) Ist eine Gerade g normal zu Π, so ist die Projection des aus einem Punkte P auf sie gefällten Lothes die Verbindungslinie von P_1 mit dem Punkte, in den sich g projicirt; und auch hier ist die Projection dem Lothe gleich.

c) Wenn eine Gerade g parallel zu Π ist, so ist das aus P_1 auf g_1 gefällte Loth die Projection des aus P auf g gefällten Lothes (Nr. 22).

d) Wenn E zu Π normal und g zu E parallel ist, so ist die Projection von g zu der Spurlinie (Projection) von E parallel, denn die projicirende Ebene von g ist mit E parallel.

e) Sind zwei Ebenen E und Φ beide auf Π normal, so giebt der Winkel ihrer Spurlinien ihren Neigungswinkel; weil Π zur Schnittlinie $E\Phi$ senkrecht ist.

58. Wenn zwei im Allgemeinen windschiefe Geraden g und l zu Π parallel sind, so ist der Winkel ihrer Projectionen, welche ihnen bez. parallel sind, gleich ihrem eigenen Winkel (Nr. 28). Die beiden zu einander parallelen Ebenen, welche bez. durch g und l gehen, sind auch zu Π parallel; jede Gerade, welche mit beiden Geraden (windschief) rechte Winkel bildet, ist zu diesen Ebenen und also zu Π normal, projicirt sich demnach als Punkt; diejenige (einzige) p unter diesen Geraden, welche zugleich beide schneidet, hât den Punkt $g_1 l_1$ zur Projection.

Nehmen wir eine andere Projectionsebene dazu, welche zur früheren senkrecht, also zu diesem gemeinsamen Loth parallel ist. Da jeder der beiden rechten Winkel (g, p), (l, p) einen zu dieser Projectionsebene parallelen Schenkel hat, so sind ihre Projectionen (g_2, p_2), (l_2, p_2) auf die zweite Projectionsebene ebenfalls rechte Winkel, also $g_2 \parallel l_2$. Die Strecke auf p zwischen den beiden Fusspunkten — die kürzeste Entfernung der beiden windschiefen Geraden — projicirt sich in der neuen Projectionsebene in wahrer Grösse als eines der Lothe zwischen den Parallelen g_2 und l_2; diese Linien sind gleichzeitig auch die Spurlinien (und Projectionen) der zu einander parallelen Ebenen durch g und l in der zweiten Projectionsebene.

Schneiden sich g und l, so fallen g_2 und l_2 zusammen: das gemeinsame Loth steht auf ihrer Ebene im Schnittpunkte senkrecht und die Fusspunkte haben sich in diesem vereinigt.

Zweiter Abschnitt.

Darstellung auf zwei Projectionsebenen.

59. Wir haben in Nr. 8, 11 gesehen, dass ein Punkt, eine Gerade durch ihre Projection auf einer (einzigen) Projectionsebene noch nicht bestimmt ist; ebenso genügt die Spurlinie in einer Projectionsebene nicht zur Bestimmung einer Ebene; würde noch der Neigungswinkel gegen die Projectionsebene hinzugefügt, so wird dadurch zwar die Ebene (freilich immer noch zweideutig) bestimmt, aber diese Bestimmung durch Spurlinie und Neigungswinkel graphisch wenig bequem sein.

Man führt deshalb noch *eine zweite Projectionsebene* ein. *Dieselbe stellt man gewöhnlich auf die erste senkrecht,* und zwar wird die erste im Allgemeinen horizontal, die andere also vertical vorgestellt und danach auch genannt und entsprechend die auf ihnen befindlichen Projectionen; die horizontale Projectionsebene heisst wohl auch Grundrissebene (*plan*), die verticale Aufrissebene (*élévation*) und daher die Projectionen Grundrissprojection, Aufrissprojection oder kurz Grundriss, Aufriss.

Wir behalten aber der Kürze und der grösseren Allgemeinheit halber die Namen erste und zweite Projectionsebene bei, bezeichnen sie mit Π_1, Π_2, und die auf ihnen gelegenen Projectionen ebenfalls mit den (unteren) Kennziffern (Indices) 1, 2; Π_1 ist dabei die gewöhnlich horizontal vorgestellte.

60. Es empfiehlt sich, bei dieser Gelegenheit etwas eingehender über *horizontale und verticale Gebilde* zu sprechen, besonders über die Zahl und das gegenseitige Verhalten dieser Gebilde.

Was eine horizontale Ebene ist, wird als bekannt angesehen. Alle horizontalen Ebenen sind einander parallel; ihre Zahl ist einfach unendlich (∞^1); durch jeden Punkt einer gegen den Horizont geneigten Geraden geht eine horizontale Ebene.

Jede Gerade, die einer horizontalen Ebene parallel ist, heisst selbst horizontal, liegt in einer horizontalen Ebene; nur durch eine horizontale Gerade kann man eine horizontale Ebene (und nur eine) legen, denn alle Geraden einer horizontalen Ebene sind horizontal. Da es nun in einer Ebene doppelt unendlich viele ($\infty^1 \times \infty^1 = \infty^2$) Geraden giebt, so ist die Zahl der horizontalen Geraden im Raume $\infty^1 \times \infty^2 = \infty^3$, dreifach unendlich.

In einer gegen den Horizont geneigten Ebene giebt es ∞^1 horizontale Linien; durch eine horizontale Gerade kann man Ebenen von allen möglichen Neigungen gegen den Horizont legen.

Vertical ist eine Gerade oder Ebene, wenn sie auf einer horizontalen Ebene (und in Folge dessen auf allen) senkrecht steht. Es giebt also so viele verticale Geraden, bez. Ebenen im Raume, als es in einer Ebene Punkte, bez. Geraden giebt, mithin doppelt unendlich viele. Alle (∞^1) Ebenen durch eine verticale Gerade sind selbst vertical, also durch eine verticale Gerade kann man nur verticale Ebenen legen.

In einer verticalen Ebene giebt es ∞^1 verticale Geraden, die übrigen Geraden haben alle möglichen Neigungen gegen den Horizont. Durch jede (nicht verticale) Gerade geht eine, aber nur eine verticale Ebene. In einer nicht verticalen Ebene giebt es keine verticalen Geraden. Zwei verticale Ebenen sind im Allgemeinen nicht parallel, sondern durchschneiden sich in einer verticalen Geraden. Durch je zwei verticale Geraden geht eine verticale Ebene. (Man sehe Nr. 25 u. 26.)

Zur Vergleichung fügen wir noch einen Ueberblick über die Zahl (Mächtigkeit) der Punkte, Geraden, Ebenen im Raume hinzu.

a) In jeder Ebene giebt es ∞^2 Punkte; da es nun durch jede Gerade ∞^1 Ebenen giebt, und ein gegebener Raumpunkt in einer und im Allgemeinen nur in einer von diesen Ebenen liegt, so ist die Zahl der Punkte im Raume $\infty^1 \times \infty^2 = \infty^3$.

b) Durch einen Punkt gehen ∞^2 Ebenen; da es nun auf einer Geraden ∞^1 Punkte (darunter der unendlich ferne) giebt und jede gegebene Ebene einen und im Allgemeinen nur einen dieser Punkte enthält, so giebt es $\infty^1 \times \infty^2 = \infty^3$ Ebenen im Raume.

c) Durch jeden Punkt gehen ∞^2 Gerade; weil es nun in einer Ebene ∞^2 Punkte giebt (darunter ∞^1 unendlich ferne oder Richtungen), und jede gegebene Gerade einen und im Allgemeinen nur einen dieser Punkte enthält, so giebt es $\infty^2 \times \infty^2 = \infty^4$ Gerade im Raume.

61. Die Schnittlinie der beiden Projectionsebenen Π_1, Π_2 heisst *Projectionsaxe, Grundlinie* (Kante, ligne de terre); sie soll mit a bezeichnet werden. Sie theilt jede der beiden Π in zwei Hälften, eine positive und eine negative, bezeichnet mit Π_1+, Π_1-; bez. Π_2+, Π_2-; sind die beiden Π bez. horizontal und f vertical, so wird der für den Beschauer vordere Theil von Π_1 und der obere von Π_2 als positive Hälfte angenommen. Der Raum wird durch die beiden Π in vier Theile getheilt, welche der erste, zweite, dritte, vierte heissen, je nachdem sie von Π_1+, Π_2+; Π_1-, Π_2+; Π_1-, Π_2-; Π_1+, Π_2- ein-

geschlossen werden. Der Beschauer wird gewöhnlich in den ersten Raum gedacht.

Um nun Alles auf einem Blatte zeichnen zu können, wird die eine Projectionsebene (welche, hängt natürlich — bei verticaler und horizontaler Stellung der Π — von der Stellung des Zeichenblatts ab; für das Resultat ist es gleichgiltig) *um die Grundlinie umgelegt, bis sie mit der anderen zusammenfällt, und zwar geschieht das Umlegen stets so, dass Halbebenen mit entgegengesetzten Zeichen, also* $\Pi_1{}^+$ *und* $\Pi_2{}^-$, $\Pi_1{}^-$ und $\Pi_2{}^+$ *auf einander zu liegen kommen und, indem die Axe horizontal gezogen wird, jene unterhalb, diese oberhalb derselben.* Im Geiste sind die Ebenen und die auf ihnen befindlichen Projectionen stets wieder in die richtige Lage zurückzubringen.

a) Darstellung des Punktes.

62. *Die Fusspunkte* P_1, P_2 *der aus einem Punkte* P *im Raume auf* Π_1, Π_2 *gefällten Lothe* p_1, p_2 *sind also seine beiden Projectionen:* diese Lothe PP_1, PP_2 selbst messen den Abstand von P von Π_1, Π_2 und heissen *sein erster, bez. zweiter Abstand* (schlechthin). Da die beiden Lothe einen Punkt (P) gemein haben, so erzeugen sie eine Ebene, welche man die projicirende Ebene des Punktes nennen kann. Diese Ebene steht, weil sie durch die zu Π_1, Π_2 normalen Geraden PP_1, PP_2 geht, auch auf diesen Ebenen selbst senkrecht, mithin auch auf deren Schnittlinie, der Grundlinie a. Treffe sie dieselbe in P_a, so sind ihre Schnittlinien mit Π_1, Π_2 bez. P_1P_a, P_2P_a und diese, sowie auch PP_a stehen auf der Grundlinie senkrecht. P_a ist demnach die Projection des Punktes P auf die Projectionsaxe a, seine Axenprojection. Ferner zeigt sich, dass *die von den Projectionen* P_1, P_2 *eines Punktes* P *auf die Projectionsaxe gefällten Lothe diese in demselben Punkte treffen, der Axenprojection von* P. Die beiden Lothe P_1P_a, P_2P_a nennt man *die erste, zweite Ordinate des Punktes* P. Die Ordinate wird positiv oder negativ genannt, je nachdem sie in der positiven oder negativen Halbebene der betreffenden Π liegt.

Denkt man sich die beiden Π durch Umlegung zum Zusammenfallen gebracht, so liegen diese beiden Lothe in *einer* Linie. *Die beiden Projectionen* P_1, P_2 *eines Punktes in den übereinandergelegten Projectionsebenen liegen stets auf einer zur Projectionsaxe senkrechten Geraden* (Ordinatenlinie).

Dabei fallen die beiden Ordinaten P_1P_a und P_2P_a auf entgegengesetzte oder dieselbe Seite von a, je nachdem sie gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben, also der Punkt im ersten oder dritten, oder im zweiten oder vierten Raume liegt. Die positiven ersten Ordi-

naten liegen stets unterhalb a, die positiven zweiten oberhalb. Wie liegen also die Projectionen eines Punktes, je nach dem Raume, dem er angehört?

Zwei Punkte, bez. in Π_1, Π_2 gelegen, deren Verbindungslinie nicht senkrecht zur Projectionsaxe steht (oder bei nicht übereinandergelegten Projectionsebenen, bei denen die aus ihnen auf die Axe gefällten Lothe nicht denselben Fusspunkt haben), können demnach nie Projectionen eines und desselben Punktes im Raume sein.

Kennt man daher die eine Projection eines Punktes, so ist das (beiderseitig unendlich lange) Loth aus ihr auf die Axe der Ort für die andere Projection; besitzt man noch eine zweite (gerade oder krumme) Ortslinie für dieselbe, so bringt man das Loth mit ihr zum Schnitt, und nennt dieses Verfahren „die bekannte Projection auf diese Linie hinauf-, bez. hinablothen".

63. *Umgekehrt, wenn P_1 und P_2 so liegen, dass P_1P_2 senkrecht a (in P_a) ist, d. h. bei nicht übereinanderliegenden Projectionsebenen, dass die aus ihnen auf a gefällten Lothe denselben Fusspunkt P_a haben, so giebt es immer einen und nur einen Punkt P im Raume, dessen Projectionen P_1 und P_2 sind.* Denn weil P_1P_a und P_2P_a sich schneiden, so erzeugen sie eine Ebene, welche, da P_1P_a und P_2P_a auf a normal sind, ebenfalls auf a senkrecht steht und mithin auch auf den durch a gehenden Ebenen Π_1, Π_2. Alle Punkte nun, welche P_1 zur ersten Projection haben, befinden sich auf dem in P_1 auf Π_1 errichteten Lothe p_1, alle, welche P_2 zur zweiten Projection haben, auf dem in P_2 auf Π_2 errichteten Lothe p_2. Jenes so wie dieses liegt in der obigen Ebene, da dieselbe auf Π_1, bez. Π_2 senkrecht steht und das Loth auf Π_1, bez. Π_2 in einem Punkte ihrer Schnittlinie mit der Ebene errichtet ist. Da also beide Lothe in derselben Ebene liegen, so haben sie einen Punkt gemein (und zwar, weil sie als Lothe auf nicht parallelen Ebenen nicht parallel sein können, jederzeit einen endlichen); mithin giebt es in der That stets einen und nur einen Punkt, welcher P_1 und P_2 zu seinen Projectionen hat, wenn sie die genannte Lage besitzen.

Jeder Punkt ist demnach durch seine beiden Projectionen vollständig bestimmt, d. h. theilt dieselben mit keinem andern Punkte.

64. Die Ordinate P_2P_a ist dem Abstande PP_1 parallel; denn weil Π_2 normal Π_1 und P_2P_a in Π_2 senkrecht a ist, so ist sie auch senkrecht Π_1; ebenso ist $P_1P_a \parallel PP_2$; demnach ist die Figur $PP_1P_aP_2$ ein Parallelogramm (und zwar ein Rechteck), folglich auch $P_2P_a = PP_1$ und $P_1P_a = PP_2$.

Also *die zweite (erste*)) Ordinate eines Punktes ist gleich dem ersten (zweiten) Abstande desselben.* Man kann folglich aus der zweiten (ersten) Projectionsebene an einer auf dem Zeichenblatte befindlichen Strecke den Abstand von der ersten (zweiten) Projectionsebene abgreifen. (Vergl. Nr. 35, 54.) Es ist demnach von Nutzen, beim „Lothen" den Schnittpunkt der Ordinatenlinie mit der Projectionsaxe stets zu markiren.

Dies, in Verbindung mit dem in Nr. 54, 55 Gesagten, genügt, um *den Neigungswinkel β einer Geraden, von der zwei Punkte durch ihre Projectionen in Π_1 und Π_2 gegeben sind, gegen Π_1 (oder Π_2) und die wahre Länge der Strecke zwischen diesen Punkten* durch Umlegung der projicirenden Ebene in Π_1 (oder Π_2), bez. in eine Parallelebene zu Π_1 (oder Π_2) *zu ermitteln* (Fig. 5 a) und b).

65. Liegt ein Punkt in einer der beiden Projectionsebenen, so fällt er mit der betreffenden Projection zusammen: seine andere Projection befindet sich auf der Projectionsaxe (und coincidirt also mit der Axenprojection). Gehört er der Projectionsaxe selbst an, so fällt er mit seinen beiden Projectionen zusammen.

b) Darstellung der Geraden.

66. *Die beiden Projectionen g_1 und g_2 einer Geraden g sind die Schnittlinien der durch g senkrecht zu Π_1, Π_2 gelegten (projicirenden) Ebenen γ_1, γ_2 mit Π_1, bez. Π_2.*

Liegt ein Punkt P auf g, so muss sowohl P_1 auf g_1, als P_2 auf g_2 liegen (Nr. 12).

Umgekehrt, wenn die Projectionen P_1 und P_2 eines Punktes P, bez. auf den Projectionen g_1 und g_2 einer Geraden g liegen, so liegt P auf g. Denn g ist die Schnittlinie der in g_1 und g_2 senkrecht auf Π_1, bez. Π_2 errichteten Ebenen γ_1, γ_2, P der Schnittpunkt der in P_1 und P_2 auf Π_1, Π_2 errichteten Lothe p_1, p_2. Da P_1 auf g_1 liegt, so muss p_1 in γ_1 liegen; ebenso p_2 in γ_2. Folglich kann der Schnittpunkt P von p_1 und p_2 nur auf der Schnittlinie g von γ_1 und γ_2 sich befinden.

Es ist also leicht, *einen Punkt auf eine Gerade,* die durch ihre Projectionen gegeben ist, *zu legen,* d. h. seine Projectionen anzugeben, oder wenn die eine Projection eines Punktes P von g gegeben, die andere aufzufinden, wobei Nr. 62 zu berücksichtigen ist.

---

*) Dieser Zusatz in Parenthese wird künftig im Allgemeinen unterbleiben und dem Leser überlassen werden, den entsprechenden Satz, bez. die entsprechende Aufgabe durch die Vertauschung der Worte „erste" und „zweite" zu bilden, event. zu lösen.

Ist aber z. B. g_2 normal oder nahezu normal zur Axe, so ist das Lothen unmöglich, bez. ungenau; kennt man noch die Projectionen zweier Punkte A und B von g, und will die zweite Projection P_2 des auf g gelegenen Punktes P, von dem P_1 bekannt ist, haben, so benutzt man den Umstand, dass

$$\frac{A_2 P_2}{B_2 P_2} = \frac{A_1 P_1}{B_1 P_1}, \text{ weil beide gleich } \frac{AP}{BP} \text{ sind (Nr. 10).}$$

67. Die beiden Spurpunkte einer Geraden heissen *erster und zweiter Spurpunkt* und sollen mit S', S'' bezeichnet werden, woran, wenn nothwendig, der Name der Geraden gehängt wird. In S', bez. S'' begegnet sich g mit ihrer ersten Projection g_1, bez. mit ihrer zweiten g_2. S', weil in Π_1 gelegen, fällt mit seiner ersten Projection zusammen, die zweite liegt also auf der Axe. Um mithin *den ersten Spurpunkt einer durch ihre beiden Projectionen g_1, g_2 gegebenen Geraden g zu finden,* ermittele man (Fig. 6 a und b) den Punkt $g_2 a = S_2'$ und lothe ihn auf g_1: d. h. errichte in ihm auf a das Loth bis zum Schnitt mit g_1 (die erste Ordinate des Spurpunkts; die andere ist Null); dieser Schnitt ist der gesuchte Punkt S'. Analog wird S'' gefunden.

68. *Eine Gerade g, welche keiner der beiden Π parallel ist,* hat zwei eigentliche Spurpunkte; sie wird durch dieselben in ein endliches Stück und zwei unendlich lange getheilt, die in drei von den vier Räumen sich befinden; in den vierten gelangt sie nicht. Das endliche Stück liegt in dem Raume, welchen die die Spurpunkte enthaltenden Projectionshalbebenen begrenzen. Eine Gerade, deren endliches Stück im ersten (zweiten) Raume liegt, kann durch parallele Verschiebung, wobei sie in dem Moment, wo sie der Axe begegnet, nur in zwei Scheitelräumen liegt, in den dritten (vierten) Raum gebracht werden. Die Projectionen einer Geraden, deren endliches Stück im ersten oder dritten Raume liegt, haben die Lage wie in Fig. 7 a oder b; liegt es in dem zweiten oder vierten, die Lage wie in Fig. 8 a oder b.

Trifft eine Gerade die Projectionsaxe, so begegnet sie sich dort mit ihren beiden Projectionen: beide Spurpunkte haben sich vereinigt.

69. *Wenn eine Gerade g der einen Projectionsebene,* z. B. Π_1, *parallel ist, so ist die ungleichnamige Projection,* also hier g_2, *der Axe parallel;* denn in der zweiten projicirenden Ebene γ_2 von g_2 giebt es zwei Richtungen, die mit Π_1 parallel sind, nämlich g nach Vor. und die zweiten Projectionsstrahlen der Punkte von g, also ist $\gamma_2 \parallel \Pi_1$; folglich sind ihre Schnittlinien mit Π_2, d. i. g_2 und a, auch parallel. Eine (und die einzige) Ausnahme wird gleich erwähnt werden. Man suche nach Nr. 67 den Spurpunkt S' von g; weil $g_2 \parallel a$ ist, so ist der Punkt $g_2 a$ unendlich fern; also auch das in ihm auf a errichtete Loth

und dessen Schnittpunkt S' mit g_1. Es ist ja auch bekannt, dass S' unendlich fern ist. Mithin ergiebt sich auch, dass wenn $g_2 \parallel a$ ist, $g \parallel \Pi_1$ sein muss. Man hätte ebenso umgekehrt aus der unendlichen Entfernung von S' auf die von $g_2 a$, also auf den Parallelismus von g_2 mit a schliessen können.

Wir wollen aber auch unabhängig von der perspectivischen Ansicht zeigen, dass wenn $g_2 \parallel a$ ist, $g \parallel \Pi_1$ sein muss: g muss in der Ebene γ_2 liegen, die in g_2 senkrecht Π_2 steht; weil aber $g_2 \parallel a$, so ist diese Ebene und mithin auch die in ihr liegende g parallel zu Π_1.

Jede Gerade, die zu einer der beiden Projectionsebenen parallel ist, wird durch ihren endlichen Spurpunkt (in der andern) in zwei Theile getheilt und befindet sich also nur in zwei Räumen.

Der Neigungswinkel (g, g_2) einer mit Π_1 parallelen Geraden g gegen die andere Projectionsebene Π_2 stellt sich in seiner ersten Projection (g_1, a) in wahrer Gestalt dar, weil auch g_2, welche sich auf Π_1 in a projicirt, mit Π_1 parallel ist.

70. *Ist eine Gerade g beiden Projectionsebenen und in Folge dessen der Axe parallel, so sind auch beide Projectionen letzterer parallel; und umgekehrt.*

Beide Spurpunkte sind unendlich fern: sie haben sich im unendlich fernen Punkt der Axe vereinigt, indem ja der jetzige Fall nach der perspectivischen Ansicht sich dem am Ende von Nr. 68 erwähnten unterordnet.

Eine solche Gerade befindet sich nur in einem der vier Räume.

71. Liegt eine Gerade in einer der beiden Projectionsebenen, so fällt sie mit der zugehörigen Projection, die andere mit der Axe zusammen; die Axe selbst ist mit ihren beiden Projectionen identisch.

72. *Steht eine Gerade g auf der einen der beiden Projectionsebenen z. B. auf Π_1 senkrecht, so ist ihre Projection g_1 ein Punkt* (Nr. 10); die erste projicirende Ebene wird unbestimmt; es könnten alle durch g gelegten Ebenen so genannt werden, aber keine giebt in ihrer Schnittlinie mit Π_1 die Projection g_1, sondern eben nur der allen diesen Schnittlinien gemeinsame Punkt ist Projection. *Die andere Projection g_2 steht senkrecht auf der Axe;* denn die zweite projicirende Ebene γ_2 steht als solche senkrecht auf Π_2; weil sie aber durch g geht, auch senkrecht auf Π_1, mithin auch auf der Axe, folglich steht diese auf der Schnittlinie $\gamma_2 \Pi_2 = g_2$ normal.

Da alle Punkte von g ihre erste Projection in g_1 haben, so muss — bei übereinandergelegten Projectionsebenen — g_2 durch den Punkt g_1 gehen. Es zeigt sich ferner, dass eine Gerade, die zu der einen

Projectionsebene parallel ist, nur dann eine zur Axe parallele Projection in der andern hat, wenn sie nicht senkrecht zu derselben ist.

73. *Ist eine Gerade zur Axe a normal* (ohne sie gerade zu schneiden), so geht durch sie eine zu a normale Ebene (Nr. 31), welche dann auch zu beiden Π senkrecht ist, in der sich also beide projicirenden Ebenen vereinigen.

Die Projectionen sind dann senkrecht auf der Axe in demselben Punkte und vereinigen sich bei übereinandergelegten Π.

74. Legen wir uns jetzt die umgekehrte Form vor: Sind zwei Gerade g_1 in Π_1, g_2 in Π_2 stets Projectionen einer Geraden im Raume?

Die Geraden, welche sich in g_1 auf Π_1 projiciren, liegen in der Ebene γ_1, die in g_1 auf Π_1 normal ist; ebenso die in g_2 auf Π_2 sich projicirenden in der in g_2 auf Π_2 normalen Ebene γ_2. Diese beiden Ebenen γ_1 und γ_2 haben im Allgemeinen eine und nur eine und zwar gewöhnlich endliche Gerade gemein.

Also *jede beliebige Gerade g_1 in Π_1 und jede beliebige Gerade g_2 in Π_2 sind im Allgemeinen Projectionen einer (und nur einer) Geraden g im Raume;* während zwei Punkte P_1 (in Π_1), P_2 (in Π_2), wenn sie Projectionen desselben Punktes im Raume sein sollen, an eine Bedingung gebunden sind (Nr. 62, 63).

Eine Gerade ist im Allgemeinen durch ihre beiden Projectionen bestimmt, d. h. theilt sie beide mit keiner andern Geraden.

75. *Es giebt aber hier Ausnahmefälle,* welche davon herrühren, dass γ_1 und γ_2 parallel oder identisch sind, oder dass die Schnittlinie $\gamma_1\gamma_2$ senkrecht zu der einen Π wird. Sind γ_1 und γ_2 parallel (incl. identisch), so stehen beide auf Π_1 und Π_2 senkrecht, also auf der Axe; mithin stehen auch ihre Schnittlinien g_1, g_2 mit Π_1, bez. Π_2 auf a normal. Sind γ_1 und γ_2 blos parallel, so stehen g_1 und g_2 in verschiedenen Punkten senkrecht; also:

Zu zwei Geraden g_1, g_2, bez. in Π_1, Π_2 gelegen und auf der Projectionsaxe, aber in verschiedenen Punkten senkrecht stehend, gehört keine endliche (eigentliche) Gerade g im Raume, deren Projectionen sie sind.

76. Sind γ_1 und γ_2 identisch, so stehen g_1 und g_2 in demselben Punkte auf a normal; den identischen Ebenen γ_1 und γ_2 sind alle Geraden gemein.

Also: *Zwei Gerade g_1 und g_2, bez. in Π_1, Π_2 gelegen und in demselben Punkte auf a normal stehend, sind gemeinsame Projectionen von doppelt unendlich vielen Geraden, allen Geraden der Ebene, die in diesem Punkte auf a senkrecht steht, mit Ausnahme derjenigen, die auf Π_1 oder Π_2 normal sind.*

Zwei solche Geraden als Projectionen fixiren also keine bestimmte

Gerade im Raume; und jede Gerade, welche zwei solche Projectionen hat (und dann also in einer zur Axe senkrechten Ebene liegt und deshalb selbst zur Axe (im Allgemeinen windschief) senkrecht ist) ist durch diese Projectionen nicht bestimmt, sondern theilt sie noch mit doppelt unendlich vielen andern Geraden, muss also anders fixirt werden, was dadurch geschieht, dass entweder zwei Punkte auf ihr durch ihre Projectionen gegeben sind (denn bei Punkten findet eine solche Unbestimmtheit nie statt) oder ihre Projection auf einer dritten Ebene, die zu keiner der beiden ersten parallel ist, hinzugefügt wird.

77. Die Schnittlinie $\gamma_1 \gamma_2$ wird auf einer Π senkrecht sein, z. B. auf Π_1, wenn g_2 so liegt, dass γ_2 nicht blos auf Π_2, sondern auch auf Π_1 senkrecht ist, d. h. wenn g_2 zu a normal ist.

Zwei Geraden g_1, g_2 bez. in Π_1, Π_2, von denen die eine z. B. g_2 senkrecht auf der Axe ist, die andere nicht, entspricht keine Gerade im Raume, von der sie die Projectionen sind; denn die Schnittlinie der zugehörigen Ebenen γ_1, γ_2 hat zwar in Π_2 die g_2, in Π_1 aber nur den Punkt $g_1 \, g_2$ zur Projection. Es wurde oben in Nr. 74 der Satz von Nr. 11 benutzt ohne Berücksichtigung des parenthetischen Zusatzes, der also in diesem Ausnahmefalle zur Geltung kommt.

78. Im Folgenden nehmen wir keine zwei solche Geraden, wie sie in Nr. 75 bis 77 beschrieben sind, als Projectionen einer Geraden im Raume an.

Haben zwei Gerade g und l die eine Projection gemein z. B. $g_1 \equiv l_1$, ohne dass dasselbe für die andere gilt, so sind sie verschieden. Beide liegen dann in der gemeinsamen ersten projicirenden Ebene $(\gamma_1 \equiv \lambda_1)$ und haben also gewöhnlich einen endlichen Punkt gemein, ausnahmsweise ihren unendlich fernen oder sind parallel. Ist das letztere der Fall, so müssen ihre zweiten Projectionen g_2, l_2 parallel sein, und umgekehrt, wenn $g_2 \parallel l_2$, so ist auch $g \parallel l$ (Nr. 13, 18). Schneiden sich g und l, so ist die zweite Projection des Punktes $g \, l$ der Punkt $g_2 \, l_2$, durch dessen Herablothen auf $g_1 \equiv l_1$ die erste Projection erhalten wird.

Also *zwei Gerade, welche die eine Projection gemeinsam haben, sind nie windschief, sondern schneiden sich oder sind parallel;* und ob sie dies oder jenes thun, ist an ihren andern Projectionen zu erkennen.

79. Wenn zwei Gerade $g = (g_1, g_2)$ und $l = (l_1, l_2)$, welche keine ihrer gleichnamigen Projectionen gemeinsam haben, sich schneiden, so müssen g_1 und l_1 in der ersten Projection, g_2 und l_2 in der zweiten Projection des Schnittpunktes sich begegnen, und also die Verbindungslinie der Punkte $g_1 \, l_1$ und $g_2 \, l_2$ senkrecht zur Axe sein.

Ist diese Verbindungslinie der Punkte g_1 l_1 und g_2 l_2 nicht senkrecht zur Axe, so sind die beiden Geraden g und l windschief (Fig. 9).

Das in g_1 l_1 auf Π_1 errichtete Loth trifft dann die beiden Geraden g und l in verschiedenen Punkten P und Q, welche beide g_1 l_1 zur ersten Projection haben, dagegen verschiedene zweite Projectionen P_2, Q_2, welche von der durch g_1 l_1 gehenden Ordinatenlinie geliefert werden. An der Lage von P_2, Q_2 erkennt man (Fig. 9), dass die Gerade l an der Stelle, wo sie sich für einen, der in der Richtung der ersten Projectionsstrahlen (streng genommen aus unendlicher Entfernung) von der positiven Seite der Π_1 her sieht, *scheinbar* mit g schneidet, *über* g geht. Das in g_2 l_2 auf Π_2 errichtete Loth trifft ebenfalls g und l in verschiedenen Punkten T, V, deren erste Projectionen T_1, V_1 die durch g_2 l_2 gehende Ordinatenlinie giebt. Die Lage von T_2, V_2 zeigt, dass die Gerade g an der Stelle, wo sie sich für einen, der in der Richtung der zweiten Projectionsstrahlen von der positiven Seite der Π_2 her sieht, mit l zu kreuzen *scheint*, *vor* l läuft. Π_1 und Π_2 sind dabei horizontal und vertical angenommen und entsprechend dem Vorzeichen der Abstände und Ordinaten $\Pi_2{+}$ auf der positiven Seite von Π_1, $\Pi_1{+}$ auf der positiven Seite von Π_2.

80. Wir haben aber noch umgekehrt nachzuweisen, dass, *wenn die Verbindungslinie von g_1 l_1 und g_2 l_2 normal zur Axe ist, g und l einen Punkt gemeinsam haben, also in derselben Ebene liegen.* Da g_1 l_1 $= P_1$ und g_2 l_2 $= P_2$ eine zu a normale Verbindungslinie haben, so sind sie Projectionen eines und desselben Punktes P im Raume (Nr. 63), weil nun P_1 auf g_1, P_2 auf g_2 liegt, so liegt P auf g; ebenso weil P_1 auf l_1, P_2 auf l_2 liegt, liegt P auf l; womit die Behauptung erwiesen ist.

81. Sind g und l parallel, so sind sowohl g_1 und l_1 parallel, also auch g_2 und l_2 (Nr. 13); umgekehrt, *wenn sowohl $g_1 \parallel l_1$, also auch $g_2 \parallel l_2$, so ist auch $g \parallel l$.*

Nach der perspectivischen Ansicht ist, weil ein unendlich ferner Punkt zur Parallel-Projection wieder einen unendlich fernen Punkt hat und umgekehrt (Nr. 43), dieser Satz nur ein besonderer Fall des vorigen, jedoch der Uebergang ins Unendliche, besonders der der Ordinatenlinie nicht so leicht zu verfolgen. Wir wählen daher den von der perspectivischen Ansicht unabhängigen Beweis.

Da $g_1 \parallel l_1$, so sind die in ihnen auf Π_1 senkrechten Ebenen γ_1 und λ_1 ebenfalls parallel; ebenso ist $\gamma_2 \parallel \lambda_2$, weil $g_2 \parallel l_2$. Legt man eine beliebige Ebene normal zu $g = \gamma_1 \gamma_2$, also auch normal auf γ_1 und γ_2, so ist sie auch normal zu den parallelen Ebenen λ_1, λ_2, mit-

hin auch zu deren Schnittlinie l; so dass g und l beide auf derselben Ebene senkrecht sind.

82. Sind g_1 und l_1 parallel, g_2 und l_2 aber nicht (oder umgekehrt), so sind g und l windschief.

Hat g in der einen Π z. B. in Π_1 einen Punkt zur Projection, so schneidet sie die Gerade $l = (l_1, l_2)$, oder ist zu ihr windschief, je nachdem der Punkt g_1 auf l_1 liegt, oder nicht. Im ersteren Falle sind die Punkte g_1 und $g_2 l_2$ die Projectionen des Schnittpunktes.

83. Liegt ein Punkt im ersten oder dritten Raume, so fallen seine Projectionen auf verschiedene Seiten der Projectionsaxe; ein Zusammenfallen ist nicht möglich. Hingegen können wohl Punkte des zweiten oder vierten Raumes *zusammenfallende Projectionen* haben (natürlich bei übereinandergelegten Projectionsebenen); dies geschieht, sobald ihre beiden Ordinaten oder Abstände (absolut) gleich sind. Es ist nicht schwer zu erkennen, dass *alle Punkte der Ebene, welche den Flächenwinkel zwischen* Π_2+ *und* Π_1- *und den Scheitelflächenwinkel* (Π_1+, Π_2-) *halbirt, und nur die Punkte dieser Ebene vereinigte Projectionen haben.* Wir wollen diese Ebene deshalb *Coincidenzebene* nennen und mit Γ bezeichnen.

Eine Gerade g, welche in Γ liegt, hat deshalb auch identische Projectionen, und umgekehrt.

Die beiden Projectionen g_1 und g_2 irgend einer Geraden g haben einen Punkt gemein: in ihm sind die Projectionen des Schnittpunktes von g mit Γ vereinigt. Je nachdem also g_1 und g_2 einen endlichen Punkt gemein haben, oder ihren unendlich fernen, also parallel sind, oder ganz identisch sind; ist g gegen Γ geneigt, oder parallel, oder liegt ganz in Γ.

84. Die Ebene Σ, welche die Winkel (Π_1+, Π_2+) und (Π_1-, Π_2-) halbirt, enthält alle Punkte, deren Projectionen zu beiden Seiten gleich weit entfernt von a, also symmetrisch zu a liegen. Jede Gerade in Σ hat Projectionen, die einander (und die Gerade) selbst auf a treffen und deren Winkel durch a halbirt wird, bez. wenn sie beide (und die Gerade selbst) zu a parallel sind, gleichweit von a abstehen, mithin ebenfalls in Bezug auf a symmetrisch sind. Ist eine Gerade parallel zu Σ, so bilden ihre Projectionen gleiche Winkel mit a (ohne sich auf a zu schneiden und ohne einander parallel zu sein). Bei jeder andern Geraden g giebt es einen (endlichen) Punkt, dessen Projectionen in Bezug auf a symmetrisch sind, den Punkt $g\,\Sigma$.

c) Darstellung der Ebene.

85. Jede Ebene E hat in jeder der beiden Projectionsebenen *eine Spurlinie, die erste s' und die zweite s''*; sollen die von verschiedenen Ebenen unterschieden werden, so wird der Name der Ebene als Index angehängt. *Trifft* E *die Projectionsaxe, so gehen durch diesen Punkt* (Axenschnitt) *beide Spurlinien; ist* E *der Axe parallel, so sind auch beide Spurlinien ihr parallel.*

Nach der perspectivischen Ansicht vereinigt sich beides in den Ausspruch: Die beiden Spurlinien einer Ebene treffen sich in einem Punkte der Axe.

Wie eine Ebene durch zwei in ihr liegende Linien bestimmt ist, so *ist auch eine Ebene durch ihre beiden Spurlinien bestimmt, d. h. theilt sie mit keiner andern Ebene des Raumes.*

Der Winkel, den die Spurlinien in der eigentlichen Stellung der Projectionsebenen bilden, hat sich natürlich beim Umlegen geändert.

86. *Ist* E *parallel zu einer Projectionsebene*, z. B. zu Π_1, so hat sie nur eine endliche Spurlinie s'', die andere s' ist unendlich fern.

Die endliche zweite Spurlinie und die Axe sind parallel als Schnitte der parallelen Ebenen E und Π_1 mit Π_2.

Also trifft auch s'' die Axe a in deren unendlich fernem Punkte, wie dies schon die ganz unendlich entfernte s' thut, und der Satz der vor. Nr. bleibt bestehen.

Da E auf Π_2 senkrecht steht, so ist s'' auch die zweite Projection von E, d. h. enthält die zweite Projection aller in E gelegenen Gebilde (Nr. 15).

87. *Es sei* E *normal zu einer Projectionsebene*, z. B. zu Π_1, ohne der andern parallel zu sein; s' schneidet dann a in einem endlichen Punkte und *die zweite Spurlinie s'' steht in diesem Punkte auf a normal*; denn sie ist die Schnittlinie der beiden zu Π_1 normalen Ebenen E und Π_2, also selbst zu Π_1 normal, folglich auch zu a. Auch hier ist natürlich s' erste Projection von E ähnlich wie in Nr. 86.

Da Π_1 auf E und auf Π_2 normal ist, so ist der Winkel der Geraden s' und a, in denen diese von jener getroffen werden, der Neigungswinkel von E gegen Π_2.

88. Steht eine Ebene E auf beiden Projectionsebenen, mithin auch auf a senkrecht, so stehen beide Spurlinien in demselben Punkte auf a normal (fallen also bei übereinanderliegenden Projectionsebenen zusammen).

In diesem Falle ist s' die erste, s'' die zweite Projection von E:

jede Figur in dieser Ebene hat in beiden Π geradlinige Projectionen. Die Geraden einer solchen Ebene sind durch ihre Projectionen nicht bestimmt (Nr. 76), wohl aber die Punkte. Durch jeden Punkt im Raume geht eine zu a senkrechte Ebene.

89. Geht eine Ebene durch die Axe, so vereinigen sich beide Spurlinien in letzterer: die Ebene ist also nicht vollständig bestimmt; es wird dann gewöhnlich noch ein der Ebene angehöriger Punkt gegeben.

90. *Wenn zwei Ebenen parallel sind, so ist jede der Spurlinien der einen Ebene mit der gleichnamigen der andern parallel,* weil sie Schnitte von parallelen Ebenen mit einer dritten sind.

Umgekehrt: *sind die Spurlinien einer Ebene (ohne selbst parallel zu sein) mit denen einer andern Ebene parallel, so sind auch beide Ebenen parallel;* denn diese Ebenen enthalten dann Winkel mit parallelen Schenkeln. *Sind hingegen die Spurlinien der einen und der andern Ebene selbst schon parallel, so kann man nur auf den Parallelismus der Ebenen (und also auch ihrer Schnittlinie) mit der Axe schliessen.*

91. *Die Schnittlinie zweier Ebenen* $\mathsf{E} = (s_{\mathsf{E}}', s_{\mathsf{E}}'')$ *und* $\Phi = (s_\Phi', s_\Phi'')$ *soll construirt werden* (Fig. 10). Es ist ersichtlich, dass sowohl der Schnittpunkt U der beiden ersten Spurlinien, als auch der V der beiden zweiten ihr angehört, und dass sie durch diese beiden Punkte schon bestimmt ist. Jener fällt mit seiner ersten Projection zusammen ($U \equiv U_1$), U_2 liegt auf der Axe (Nr. 65); ebenso ist $V \equiv V_2$, V_1 liegt auf a. Bezeichnen wir die Schnittlinie mit k, so ist $k_1 = U_1 V_1$, $k_2 = U_2 V_2$.

Die Punkte U und V sind offenbar die beiden Spurpunkte von k.

Sind E und Φ parallel, so sind auch s_{E}' und s_Φ' und ebenso s_{E}'' und s_Φ'' parallel, also sowohl U, wie V unendlich fern, mithin auch UV, vorausgesetzt freilich, dass U und V, d. h. die Richtung von s_{E}' und s_Φ' und die von s_{E}'' und s_Φ'' verschieden sind (Nr. 90).

a) Ist eine der beiden Ebenen, z. B. Φ senkrecht z. B. zu Π_1 (Fig. 11), dann ist s_Φ'' senkrecht zu a (Nr. 87); folglich fällt V_2 in den Punkt $s_\Phi' s_\Phi''$ und demnach k_1 auf die Linie s_Φ', wie zu erwarten, weil alle Geraden von Φ ihre erste Projection in s_Φ' haben.

b) Ist Φ nicht blos normal zu Π_1, sondern auch parallel zu Π_2 (Fig. 12), so wird k parallel zu Π_2, also auch zur zweiten Spurlinie s_{E}'' (Nr. 20), mithin auch k_2 parallel zu s_{E}''; andererseits geht sie durch U_2.

Nach der perspectivischen Ansicht ist s_Φ'' in diesem Falle unendlich fern, mithin der Punkt $V \equiv V_2$ der unendlich ferne Punkt von s_{E}'', demnach die Linie $k_2 = U_2 V_2$ die Parallele durch U_2 zu s_{E}''.

Lässt man den Punkt $V_1 = s_\Phi' \, s_\Phi''$ in Fig. 11 auf der Axe ins Unendliche rücken, so erhält man Fig. 12.

c) Sind beide Ebenen E und Φ normal zu Π_1, so ist es auch ihre Schnittlinie; k_1 reducirt sich auf den Punkt $(s_\mathsf{E}', s_\Phi') = U \equiv U_1$; k_2 geht durch U_2 nach dem unendlich fernen Schnittpunkt $V \equiv V_2$ der zu a normalen zweiten Spurlinien, ist mithin selbst zu a normal.

92. *Treffen aber die Ebenen* E *und* Φ *beide die Axe in dem nämlichen Punkte* O, durch welchen dann alle vier Spurlinien gehen; so vereinigen sich in diesem die beiden Spurpunkte U, V der gesuchten Schnittlinie; dieselbe trifft in ihm die Axe (Fig. 13). Man kennt dann aber von ihr eben erst diesen einen Punkt und muss sich einen zweiten zur vollständigen Bestimmung auf andere Weise verschaffen.

In diesem Fall wird man zu einer *Hilfsebene* Δ greifen; ermittelt man deren beide Schnittlinien $t = \Delta\Phi$ und $u = \Delta\mathsf{E}$ auf die vorher gezeigte Weise — es ist natürlich selbstverständlich, dass man die Hilfsebene nicht auch noch durch den gemeinsamen Punkt von E und Φ legt, der sich auf a befindet —, so findet man in deren Schnittpunkt (denn einen gemeinsamen und zwar im Allgemeinen endlichen Punkt müssen sie als zwei Gerade derselben Ebene Δ haben) einen Punkt W der gesuchten Linie $k = \mathsf{E}\Phi$; $W_1 O$ oder (da $O_1 \equiv O_2 \equiv O$) $W_1 O_1 = k_1$, $W_2 O_2 = k_2$.

a) Am brauchbarsten sind als Hilfsebenen für diesen Zweck solche Ebenen, welche zu der einen Projectionsebene senkrecht sind (Fig. 14), und ganz besonders solche, die zu der andern parallel sind*); die beiden Schnittlinien mit E und Φ haben dann die eine Projection gemeinsam: die beiden zweiten Projectionen werden nach Nr. 91 a) oder b) gesucht; ihr Schnittpunkt ist W_2, W_1 ergiebt sich durch Herablothen auf die gemeinsame erste Projection.

b) Ein specieller Fall hiervon ist nach der perspectivischen Ansicht der, wenn beide Ebenen E und Φ der Projectionsaxe parallel sind, also sie in demselben unendlich fernen Punkte O treffen. Die Projectionen k_1 und k_2 sind in diesem Falle durch W_1, bez. W_2 parallel zu a d. h. nach dem unendlich fernen $O_1 \equiv O$, bez. $O_2 \equiv O$ zu ziehen. Die Schnittlinie der beiden Ebenen ist ja in diesem Falle parallel zur Axe. Hier darf man natürlich zur Ermittelung des Punktes W nicht eine ebenfalls parallel zur Axe gehende Hilfsebene wählen, z. B. also auch keine, die einer der beiden Π parallel ist.

93. Einen Punkt (oder mehrere) wie W zu suchen, kann man

---

*) weil man bei diesen unbequemen Schnittpunkten weniger ausgesetzt ist: constructiv sind unendlich ferne Punkte günstiger als weit entfernte.

auch oft dadurch genöthigt werden, dass einer der beiden Punkte U, V (oder beide) auf dem Zeichenblatte ungünstig liegen, oder wenn man, um die Gerade k ganz exact zu haben, sich nicht mit zwei Punkten begnügt.

94. Wir betrachten jetzt wieder nur eine Ebene E mit den Spurlinien s', s''. Jede der beiden Spurlinien fällt mit ihrer gleichnamigen Projection zusammen, die andere ist die Axe.

Wie wir zwei Spurlinien haben, so haben wir auch in jeder Ebene *zwei Arten Hauptlinien, erste Hauptlinien h', welche der ersten Projectionsebene, also auch der ersten Spurlinie parallel sind* und in E durch zu Π_1 parallele Ebenen eingeschnitten werden, *und zweite Hauptlinien h'', welche mit Π_2 und s'' parallel sind* und durch zu Π_2 parallele Ebenen in E eingeschnitten werden.

Wird Π_1 horizontal, Π_2 vertical angenommen, so sind die ersten Hauptlinien stets horizontal, die zweiten aber im Allgemeinen nicht vertical; sondern nur, wenn E zu Π_1 normal, also selbst vertical ist. Bei dieser Lage der Π kann man die zu Π_1, bez. Π_2 parallelen Ebenen auch Niveau-, bez. Frontebenen nennen, und die zu Π_1, Π_2 parallelen Geraden Niveau-, Frontlinien, die Hauptlinien einer Ebene also die Niveau-, bez. Frontlinien derselben; doch bleiben wir der Allgemeinheit wegen bei unserer Bezeichnung.

Ist h' also eine erste, h'' eine zweite Hauptlinie der Ebene $\mathsf{E} = (s', s'')$, so ist die erste Projection h_1' von h' parallel s' (Nr. 20), h_2' parallel der Projectionsaxe a (Nr. 69); analog ist $h_2'' \parallel s''$, $h_1'' \parallel a$; in Nr. 91 b) war die Schnittlinie $\mathsf{E}\Phi$ zweite Hauptlinie in E. Es ist nun ersichtlich, dass nicht jede beliebige Gerade in Π_1, die parallel zu s', und jede beliebige Gerade in Π_2, welche zu a parallel ist, Projectionen einer ersten Hauptlinie in E sind; suchen wir, welche zusammengehören. Es sei also h_1' parallel s' in Π_1 gegeben (Fig. 15), welches h_2' gehört dazu, so dass h' in E liegt? Es treffe h_1' die Axe a in Q_1, so muss Q_2 auf s'' liegen und mit Q identisch sein; denn nur solche Punkte, welche in Π_2 liegen, haben ihre erste Projection auf der Axe; sollen sie ausserdem noch der Ebene E angehören, so können sie nur auf $s'' = \mathsf{E}\Pi_2$ liegen; mit ihrer zweiten Projection sind sie identisch. Mithin geht das zugehörige h_2' durch Q_2 parallel zur Axe. Wäre h_2' zuerst bekannt, so erhielte man $Q_2 = h_2' s''$, lothete ihn auf a als Q_1 und zöge durch Q_1 die h_1' parallel s'.

Aehnliches gilt für die zweiten Hauptlinien.

95. Die eben behandelte Aufgabe ist nur ein specieller Fall einer andern allgemeineren Aufgabe: *In die Ebene $\mathsf{E} = (s', s'')$ eine Gerade g zu legen (d. h. ihre beiden Projectionen zu construiren), oder genauer,*

wenn die eine gegeben ist, z. B. g_1, *die andere* g_2 *zu suchen, so dass* g *in* E *liegt.* Man suche die Punkte $R \equiv R_1 = g_1 s'$ und $Q_1 = g_1 a$. Ersterer ist der Punkt, in dem die gesuchte Gerade g die erste Spurlinie der Ebene (und also Π_1) trifft und sich dort mit ihrer ersten Projection begegnet, und zugleich dessen erste Projection; seine zweite Projection R_2 liegt also auf a. Die zweite Projection Q_2 von Q muss, wie in Nr. 94, auf s'' liegen. Die gesuchte g_2 ist $R_2 Q_2$.

In dem speciellen Falle der vorigen Nr. war g_1, dort h_1', parallel s', also $R \equiv R_1$ unendlich fern, mithin auch R_2 unendlich fern auf a; die Gerade g_2, dort h_2', geht also durch Q_2 nach dem unendlich fernen Punkte von a, d. h. ist zu a parallel durch Q_2 gezogen, wie es oben gefunden wurde.

96. Fassen wir unsere jetzige Aufgabe noch von einer andern Seite auf, um zu erkennen, dass *sie (in der genaueren Fassung) im Allgemeinen nur eine Lösung hat und ob es nicht Ausnahmefälle giebt.*

Wenn g_1 die erste Projection einer Geraden g sein soll, so muss letztere in der Ebene Υ_1 liegen, welche in g_1 normal zu Π_1 ist. Andererseits soll g in E liegen, also kann sie keine andere Linie sein, als die Schnittlinie EΥ_1; im Allgemeinen haben zwei Ebenen stets eine und nur eine (und zwar gewöhnlich endliche) Gerade gemein. Wir sehen, dass wir g, oder vielmehr, was ja blos noch fehlt, g_2 mit Hilfe der Construction in Nr. 91 a) hätten finden können; in der That unterscheidet sich die dortige Figur von der der vor. Nr. nur in Bezeichnungen; die zu ziehenden Linien sind ganz dieselben.

Zur Uebung ist dieselbe Aufgabe für den Fall zu wiederholen, dass g_2 gegeben ist. Ferner soll sowohl eine erste Falllinie f', als eine zweite f'' construirt werden. Jene muss in E senkrecht zu s' sein, also f_1' senkrecht zu s' (Nr. 20); diese senkrecht zu s'', also f_2'' senkrecht zu s''. Oder es kann auch ein ganzer Strahlbüschel in E gezeichnet werden und in demselben die beiden Hauptlinien und die beiden Falllinien.

Im Allgemeinen, hiess es eben, haben E und Υ_1 nur eine und zwar endliche Linie gemein; nehmen wir an, E *sei senkrecht zu* Π_1. Ist nun g_1 nicht parallel zu s', so schneiden sich beide Ebenen in einer zu Π_1 normalen Geraden; diese hat aber nicht g_1 zu ihrer ersten Projection, sondern blos ihren Fusspunkt $g_1 s'$; also hat in diesem Falle die Aufgabe keine Lösung. Ist $g_1 \parallel s'$, so ist $\Upsilon_1 \parallel$ E; ihre Schnittlinie unendlich fern; folglich hat in diesem Falle die Aufgabe keine endliche Lösung. Ist endlich drittens g_1 identisch mit s', so ist auch Υ_1

identisch mit E; alle Geraden in E (mit Ausnahme der zu Π_1 normalen) haben $g_1 \equiv s'$ zu ihrer ersten Projection. Die Aufgabe ist unbestimmt (∞^2-deutig).

97. Mit Hilfe der eben behandelten Aufgabe soll nun die analoge für den Punkt gelöst werden. *In eine Ebene* E *soll* also *ein Punkt gelegt, d. h. seine Projectionen construirt werden; oder genauer die eine Projection z. B.* P_1 *ist gegeben, es soll* P_2 *gefunden werden.* P kann sich nur in dem in P_1 auf Π_1 errichteten Lothe p_1 befinden; ist also E gegen Π_1 geneigt, mithin zu p_1 nicht parallel, so haben p_1 und E stets einen und nur einen und zwar endlichen Punkt gemein, die Aufgabe hat also stets eine und nur eine Lösung. Ist aber E normal zu Π_1, mithin parallel zu p_1, so ist der Punkt Ep_1 unendlich fern, demnach hat die Aufgabe keine endliche Lösung; liegt jedoch P_1 auf s', so liegt das ganze Loth p_1 in E, daher genügen alle Punkte von p_1 der Aufgabe, sie ist unbestimmt (∞^1-deutig). Nehmen wir demnach *die allgemeine Lage von* E an, *wo sie gegen* Π_1 *geneigt ist und es nur eine Lösung giebt* (Fig. 16).

Geht g in E durch den gesuchten Punkt P, so liegt P_1 auf g_1, P_2 auf g_2; umgekehrt, liegt P_1 auf g_1, so geht die Gerade g in E, welche g_1 zur ersten Projection hat, durch P (Nr. 17), also auch g_2 durch P_2. Wir ziehen deshalb eine beliebige Gerade g_1 (in Π_1) durch P_1, suchen (Nr. 95, 96) g_2, so dass $g = (g_1, g_2)$ auf E liegt, und lothen P_1 auf g_2 als P_2; so ist $P = (P_1, P_2)$ der gewünschte Punkt.

Statt einer beliebigen Linie pflegt man häufig eine der beiden Hauptlinien zu wählen.

98. *Wir wollen den Schnittpunkt einer Geraden* $g = (g_1, g_2)$ *mit einer Ebene* E $= (s', s'')$ *suchen.*

a) Liegt der einfachere Fall vor, dass E *senkrecht zu einer* Π, z. B. zu Π_2 ist, so muss, weil alle Punkte von E dann ihre zweite Projection auf s'' haben, die zweite Projection P_2 des gesuchten Punktes $P = g$E der Punkt $s'' g_2$ sein; die erste P_1 ergiebt sich durch Lothen auf g_1.

b) Im andern Falle aber, *wenn* E *gegen beide* Π *geneigt ist* (Fig. 17), sucht man in E nach Nr. 95, 96 die Gerade l auf, welche mit g die eine Projection, z. B. die erste, gemein hat; nach Nr. 78 schneiden sich dann g und l oder sind parallel; was daran zu erkennen ist, ob g_2 und l_2 sich schneiden oder parallel sind. Ist g mit l parallel, so ist auch g mit E, in welcher l liegt, parallel. Schneiden sich g und l, so ist ihr Schnittpunkt P zugleich der gesuchte Punkt gE. Fällt g_2 mit l_2 zusammen, so befindet sich g ganz in E.

In ähnlicher Weise kann man untersuchen, ob ein (durch seine

Projectionen) gegebener Punkt in einer gegebenen Ebene liegt: man construirt den Punkt der Ebene, der mit ihm die eine Projection gemein hat (Nr. 97), und sieht, ob auch die andern Projectionen identisch sind.

99. Der Satz in Nr. 56 auf beide Projectionsebenen angewandt lautet:

Die beiden Projectionen einer Geraden, welche auf einer Ebene senkrecht steht, sind bez. zu den gleichnamigen Spurlinien und zu den gleichnamigen Projectionen der gleichnamigen Hauptlinien normal; selbstverständlich ist der Fall auszuschliessen, wo die eine Projection ein Punkt ist.

Umgekehrt: *Jede Gerade, deren beide Projectionen bez. auf den gleichnamigen Spurlinien u. s. f. einer Ebene normal sind, ist zu dieser Ebene normal;* vorausgesetzt, dass sie eine Gerade ist, die durch ihre Projectionen bestimmt ist, also nicht in einer zu a normalen Ebene liegt.

Weil s' auf g_1 normal ist und Υ_1, in welcher g liegt, auf Π_1, so ist auch s' normal auf Υ_1; mithin auch E, welche durch s' geht, normal zu Υ_1. Ebenso ergiebt sich, dass E auf Υ_2 normal ist; also steht sie auch senkrecht auf $\Upsilon_1 \Upsilon_2 = g$. Der letzte Schluss ist hinfällig, sobald Υ_1 und Υ_2 identisch sind, also in dem im Satze erwähnten Ausnahmefalle.

Die Richtigkeit des Satzes lässt sich auch leicht indirect einsehen.

Es ist nun leicht die Aufgabe zu lösen, *aus einem Punkte P auf eine Ebene die Normale (p) zu fällen, ihren Fusspunkt (F) zu construiren* (Nr. 97) *und die wahre Länge dieses Lothes, also die Entfernung des Punktes von der Ebene zu ermitteln* (Nr. 54, 55, 64) (Fig. 18).

100. Da die Spurpunkte einer Geraden, die in einer Ebene liegt, auf den gleichnamigen Spurlinien dieser Ebene (in endlicher oder unendlicher Entfernung) liegen, so ergeben sich die Spurlinien aller Ebenen durch eine Gerade g, wenn man die verschiedenen Punkte der Axe mit den beiden Spurpunkten von g verbindet. Unter diesen Ebenen sind hervorzuheben die, welche zu a parallel ist, für welche also die Spurlinien nach dem unendlich fernen Punkte von a, d. i. parallel zu a gehen, und die beiden bez. zu Π_1, Π_2 senkrechten, für welche die Spurlinie in der andern Π normal zu a ist.

Ist die Gerade g zu der einen Π, z. B. zu Π_1 parallel, so ist ihr erster Spurpunkt der unendlich ferne Punkt von g_1 (Nr. 69); die ersten Spurlinien aller durch g gelegten Ebenen gehen nach demselben, d. h.

sind zu g_1 (und zu g) parallel: g ist ja dann auch eine erste Hauptlinie in allen diesen Ebenen.

101. *Eine Ebene* E *ist durch ihre Spurlinien* s', s'' *gegeben; es soll zu ihr durch einen Punkt* $P = (P_1, P_2)$ *die Parallelebene* Φ *geführt werden.* Nach Nr. 90 müssen die Spurlinien der verlangten Ebene den gleichnamigen von E parallel sein. Kennt man also wenigstens für eine jener Spurlinien einen Punkt, so hat man beide.

a) *Steht* E *senkrecht z. B. auf* Π_1, so gilt dies auch für die verlangte Ebene, folglich geht ihre erste Spurlinie durch P_1 (was im andern Falle nicht geschieht) und man hat nun beide Spurlinien der gesuchten Ebene unmittelbar.

b) *Ist aber* E *nicht zu einer der* Π *normal* (Fig. 19), so construire man in E irgend eine Gerade g (Nr. 95); die Parallele l durch P zu dieser Geraden g liegt in der gesuchten Ebene: in den Spurpunkten von l hat man je einen Punkt für jede der beiden verlangten Spurlinien. Da dieselben zu s_E', s_E'' parallel sind, so hat man in der Bedingung, dass sie sich auf a treffen sollen, eine Controlle.

Es empfiehlt sich, für die Gerade g eine der beiden Spurlinien von E zu wählen, weil man sich in diesem Fall die Construction von g ganz erspart; die l wird dann in der gesuchten Ebene eine gleichnamige Hauptlinie. Freilich fällt die Controlle weg.

102. Indem man eine Ebene durch die beiden Spurlinien bestimmt, bestimmt man sie durch zwei Gerade mit gemeinsamem (endlichen oder unendlich fernen) Punkte. Wir wollen uns jetzt *die Ebene durch irgend zwei andere Geraden mit gemeinsamem Punkte* $g = (g_1, g_2)$ *und* $l = (l_1, l_2)$ *gegeben denken.*

a) *Die Spurlinien der Ebene* gl (Fig. 20) erhält man, indem man die gleichnamigen Spurpunkte von g und l verbindet: als Controlle dient, dass sie sich auf a schneiden müssen.

b) *Eine erste Hauptlinie in* gl (dieselbe Figur) erhält man, indem man h_2' parallel a zieht, die Punkte $h_2' g_2$ und $h_2' l_2$ bez. auf g_1 und l_1 lothet und die erhaltenen Punkte durch h_1' verbindet; denn h' muss sowohl mit g, als mit l einen Punkt gemein haben (Nr. 79, 80).

Die Gerade h_1' giebt die Richtung der ersten Spurlinie von gl.

Aehnlich verschafft man sich eine zweite Hauptlinie in gl.

c) Zieht man m_1 (oder m_2) beliebig, lothet $m_1 g_1$, $m_1 l_1$ (bez. $m_2 g_2$, $m_2 l_2$) auf g_2, l_2 (bez. g_1, l_1) und verbindet die erhaltenen Punkte durch m_2 (bez. m_1), so hat man *die beiden Projectionen* m_1, m_2 *einer in* gl *liegenden Geraden.*

d) *Auch einen Punkt kann man leicht in die Ebene* gl *legen:* sei z. B. P_1 die beliebig gewählte erste Projection, so zieht man durch

sie m_1, construirt nach c) das zugehörige m_2 und lothet P_1 nach m_2 als P_2.

e) *Den Schnittpunkt einer Geraden $v = (v_1, v_2)$ mit der Ebene $g\,l$* findet man, indem man nach c) in gl die Gerade construirt, die mit v die eine Projection z. B. die erste gemein hat, und sonst wie in Nr. 98 verfährt.

f) *Die Schnittlinie zweier Ebenen, deren jede durch zwei sich schneidende Geraden bestimmt ist,* wird gefunden, indem man die Schnittpunkte der Geraden der einen Ebene mit der andern ermittelt nach e) und verbindet, oder auch indem man (mindestens) zweimal zwei Gerade mit einer gemeinsamen Projection, die eine in der einen, die andere in der andern Ebene nach c) construirt und zum Schnitte bringt (Nr. 78). Die Schnittpunkte dieser zwei (oder mehreren) Geradenpaare müssen in der verlangten Schnittlinie liegen.

Die Construction in c) findet auch insofern häufig Verwendung, als bisweilen die eine der ursprünglich gegebenen Geraden unbequem liegt, z. B. ausserhalb des Zeichenblattes fallende Spurpunkte liefert und dann also leicht durch irgend eine andere Gerade der Ebene ersetzt werden kann.

Da man nach a) die Spurlinien, oder nach b) von jeder Art eine Hauptlinie sehr schnell construiren kann, so ist es auch leicht, *aus einem Punkte das Loth auf die Ebene gl zu fällen, nach* e) *dessen Fusspunkt zu ermitteln und, wie oben, seine wahre Länge zu bestimmen.*

Die Bestimmungen einer Ebene durch eine Gerade und einen nicht auf ihr befindlichen Punkt oder durch drei Punkte, die ein Dreieck bilden, lassen sich bekanntlich auf die durch zwei Gerade mit gemeinsamem Punkt zurückführen.

103. Die im Vorhergehenden angegebenen Constructionen kann man ersichtlich auf den Fall übertragen, wo eine Ebene durch die Projectionen einer *Figur*, von der man weiss, dass sie eben ist, oder die man daraufhin construirt hat, bestimmt ist (z. B. eine Seitenfläche eines durch seine Projectionen dargestellten Polyeders); da man ja stets Gerade ziehen kann, die dieselbe mindestens zweimal treffen. Bei einer solchen Figur hat man dann meistens Controllen: besteht sie aus mehreren Geraden, $g, l, m, n \ldots$, so müssen, wenn man z. B. die andere Projection einer Geraden r in der Ebene haben will, von welcher r_1 bekannt oder beliebig gewählt ist, die Punkte auf $g_2, l_2, m_2, n_2, \ldots$, welche durch Lothen aus den Schnittpunkten $r_1 g_1$, $r_1 l_1$, $r_1 m_1$, $r_1 n_1 \ldots$, sich ergeben, in gerader Linie liegen, nämlich auf r_2. Aehnliches gilt, wenn r eine krummlinige Figur in der Ebene mehr als zweimal trifft.

Theoretisch genügen dann von den Geraden zwei Punkte, practisch wird man meistens der grösseren Genauigkeit halber mit dreien arbeiten.

104. Ein Dreieck PQR ist immer eben. Denken wir uns die Ebene desselben durch die Seiten begrenzt (Fig. 21). Sei g eine Gerade, welche diese begrenzte Ebene (also innerhalb des Dreiecks) trifft in dem Punkte M, der nach Nr. 102 e) construirt ist. Stellen wir uns die Dreiecksebene materiell vor, so wird g theilweise verdeckt sein, und zwar, da die Sehrichtung für die beiden Projectionsebenen verschieden ist, in beiden möglicherweise verschiedenartig. Betrachten wir *die Sichtbarkeit in* Π_1; g_1 schneidet zwei Seiten von $P_1 Q_1 R_1$, nämlich $P_1 Q_1$, $Q_1 R_1$ (also durchschneidet sich g scheinbar mit PQ, QR). Es heisse der Punkt $(g_1, P_1 Q_1)$, je nachdem er zu g_1 oder $P_1 Q_1$ gehört, J_1 oder K_1; man lothe ihn bez. auf g_2 und $P_2 Q_2$ als J_2, K_2. Da K_2 über J_2 liegt, so beweist dies, dass für den in der Richtung der ersten Projectionsstrahlen (von oben nach unten) sehenden an der Stelle des scheinbaren Schnitts die Dreiecksseite PQ über der g weggeht. Da g bei M durch die Dreiecksebene geht, so geht an der Stelle des scheinbaren Schnitts von g und QR erstere über der letzteren, wie dies auch der Uebung halber noch genauer untersucht werden mag. Folglich ist g unterhalb J sichtbar, von J bis M unsichtbar, von JM nach oben sichtbar; $J_1 M_1$ ist also zu punktiren, die beiden andern Theile sind auszuziehen.

Ebenso ist die Sichtbarkeit in der zweiten Projectionsebene zu untersuchen.

Zwei Dreiecksebenen durchdringen sich (Nr. 102) und bedecken sich gegenseitig theilweise; es ist die Sichtbarkeit der einzelnen Theile näher zu untersuchen.

Giebt man mehr als drei Punkte vollständig, d. h. durch beide Projectionen, und verbindet sie zu einem einfachen Polygone, so ist dieses im Allgemeinen uneben.

Soll das Polygon eben sein, so wird man (vorausgesetzt, dass die Ebene nicht von vorn herein gegeben ist) *nur drei von den Eckpunkten vollständig geben können, von den übrigen nur je eine Projection,* indem die andere Projection dann so zu construiren ist, dass der betreffende Punkt in der durch die drei ersten Punkte bestimmten Ebene liegt (Nr. 102, d).

Sind also P, Q, R die vollständig gegebenen Punkte*); von einer

---

*) Es ist zu empfehlen, zur Bestimmung der Ebene nicht drei Nachbarpunkte, sondern ziemlich weit aus einander liegende Punkte zu wählen, denn je weiter die bestimmenden Punkte einer Geraden oder Ebene aus einander liegen, desto

vierten Ecke M sei blos M_1 gegeben; so ziehe man z. B. $M_1 P_1$, lothe den Punkt $(M_1 P_1, Q_1 R_1) = N_1$ auf $Q_2 R_2$ als N_2 und dann M_1 auf $P_2 N_2$ als M_2 (Fig. 22). Als Controlle dient eine Wiederholung der Construction in anderer Gruppirung. Die schon erhaltenen Punkte können natürlich für die Construction der weitern an Stelle der ursprünglichen treten.

105. Man wird aber bald bemerken, dass zwischen den beiden ebenen Systemen (von Punkten und Geraden), die sich durch die Projectionen des Systems von Punkten und Geraden einer Ebene E auf beide Projectionsebenen ergeben, eine ähnliche Beziehung statt hat, wie zwischen den durch eine Projection und durch Umlegung entstandenen (Nr. 45), nämlich Affinität.

Zunächst ist klar, dass wenn P_1 auf g_1 liegt, dann P auf g in E liegt (Nr. 17) und also P_2 auf g_2; ebenso umgekehrt.

Ferner die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte P_1 und P_2 sind alle parallel, weil sie auf der Axe normal sind.

Endlich in jeden Punkt, in dem sich zwei entsprechende Geraden g_1, g_2 (Projectionen derselben Geraden g in E) schneiden, sind die Projectionen des Punktes von g zusammengefallen, in dem sie die Coincidenzebene Γ trifft (Nr. 83); alle diese Punkte liegen für die Geraden von E auf einer Geraden, nämlich auf $\Gamma\mathsf{E} = m$, der einzigen Geraden in E, deren Projectionen m_1 und m_2 sich vereinigen in m_{12}. Auf dieser m_{12} treffen sich also alle entsprechenden Geraden g_1 und g_2 (bez. sind ihr beide parallel). Man sehe die Fig. 22.

Es sind nun alle Bedingungen der Affinität nachgewiesen: m_{12} ist die Affinitätsaxe; die Affinitätsstrahlen stehen diesmal im Allgemeinen nicht zur Affinitätsaxe senkrecht, wie bei der früheren Affinität.

Die beiden ebenen Systeme, welche durch die Projectionen einer Ebene E *auf* Π_1 *und* Π_2 *sich ergeben, sind affin; Affinitätsaxe ist die identische erste und zweite Projection der Geraden, in welcher* E *die Coincidenzebene* Γ *durchschneidet.*

106. Um *die Affinitätsaxe zu ermitteln,* suche man also die Schnittpunkte der Projectionen irgend zweier Geraden g und l der Ebene; z. B. der, durch welche man sich vielleicht die Ebene bestimmt gedacht hat. Graphisch empfiehlt es sich freilich, diese Gerade, von der die ganze weitere Construction abhängt, durch mehr als zwei Punkte zu bestimmen.

Sind etwa l_1 und l_2 parallel, so ist auch m_{12} mit ihnen (die Ebene Γ mit l) parallel; sind sowohl l_1 und l_2, als auch g_1 und g_2 parallel,

genauer ist die Zeichnung. Diese graphische Regel suche man so viel wie möglich zu befolgen.

aber jene nicht diesen, so hat m_{12} zwei verschiedene unendlich ferne Punkte g_1g_2, l_1l_2, ist mithin selbst unendlich fern. In der That, l sowohl wie g ist dann parallel mit Γ, und da sie einander nicht parallel sind, so ist $E = gl$ parallel mit Γ, die Schnittlinie m also unendlich fern; jede Gerade in E mit Γ parallel; d. h. ihre Projectionen unter einander parallel.

Sind die Punkte g_1g_2 und l_1l_2 identisch (was z. B. auch eintritt, wenn alle vier Linien parallel sind), so genügen sie natürlich nicht zur Bestimmung von m_{12}. Dieser Fall liegt vor, wenn die Ebene durch ihre Spurlinien bestimmt ist; denn $s_1' = s'$, $s_2' = a$; $s_1'' = a$, $s_2'' = s''$; also sowohl $s_1's_2'$ als $s_1''s_2''$ ist der Punkt $s's''$ auf der Projectionsaxe. Jedenfalls aber liegt dieser Punkt auf der Affinitätsaxe und kann mit zu deren Fixirung dienen.

107. Die Richtung der Affinitätsstrahlen ist ein für alle Male bekannt als zur Projectionsaxe normal. Kennt man nun noch die Affinitätsaxe m_{12} und ein Paar entsprechende Geraden g_1, g_2, so kann man zu jeder Geraden, jedem Punkte des einen Systems die entsprechende Gerade, den entsprechenden Punkt im andern construiren, z. B. zu der ersten Projection b_1 einer Geraden b in E die zweite b_2; b_2 und b_1 müssen sich auf m_{12} begegnen. Durch den Punkt g_1b_1 ziehe man den Affinitätsstrahl (die Ordinatenlinie) und erhält in dem Punkte, wo derselbe g_2 trifft, einen zweiten bestimmenden Punkt für b_2. Oder es soll zu der ersten Projection P_1 eines Punktes P in E die zweite Projection P_2 gesucht werden. Der Affinitätsstrahl durch P_1 ist der eine Ort für P_2. Man ziehe dann eine beliebige Gerade b_1 durch P_1, welche g_1 in B_1 treffe; der Affinitätsstrahl durch B_1 giebt den entsprechenden Punkt B_2 auf g_2; die Gerade b_2, welche B_2 mit b_1m_{12} verbindet, entspricht b_1 und ist ein zweiter Ort für P_2.

Wenn man von zwei entsprechenden Punkten statt von zwei entsprechenden Geraden ausgeht, so ist die Construction von Nr. 47 anzuwenden; es ist ferner ersichtlich, dass an Stelle der ursprünglichen entsprechenden Elemente schon construirte treten können und oft müssen, wenn unbequeme Lagen, schleifende Schnitte (d. h. Schnitte mit kleinen Winkeln) es erfordern.

108. Wir wollen mit den beiden Affinitäten nun folgende zwei Aufgaben construiren.

Die Ebene eines Sechsecks ABCDEF ist dadurch bestimmt, dass drei (nicht benachbarte) Ecken A, C, E durch ihre beiden Projectionen gegeben sind, von den übrigen Ecken B, D, F ist nur die erste Projection (und damit die erste Projection der ganzen Figur) gegeben. Es soll die

zweite Projection und die Umlegung in die Projectionsebene Π_1, *also die wahre Gestalt construirt werden* (Fig. 23).

Wir ermitteln zuerst die Axe m_{12} der Affinität zwischen den ebenen Systemen der beiden Projectionen. Sie ist die Verbindungslinie der drei Punkte (A_1C_1, A_2C_2), (A_1E_1, A_2E_2), (C_1E_1, C_2E_2) und dadurch genauer als durch blos zwei von diesen drei Punkten bestimmt. Nun suche man zu B_1 den entsprechenden Punkt B_2; man verbinde B_1 mit dem weitesten der drei Punkte A_1, C_1, E_1, also in der Figur mit E_1, und durch den Punkt, wo B_1E_1 die Gerade m_{12} trifft, zieht man aus E_2 die Gerade; dieselbe muss B_2 enthalten. In der Figur ist jeder Punkt mehrfach construirt und auch nachträglich sind noch Controllen hinzugefügt.

Hat man nun B_2, D_2, F_2 gefunden und damit die zweite Projection der Figur, so lege man einen Punkt um in die Π_1; dazu ist freilich die erste Spurlinie s' nothwendig. Von ihr ist schon bekannt der Punkt am_{12} (Nr. 106); theoretisch genügt also noch der erste Spurpunkt einer der Seiten oder Diagonalen, praktisch wird man zur genaueren Fixirung dieser wichtigen Linie zwei Spurpunkte construiren, und wie oben gesagt, diese drei bestimmenden Punkte nicht zu nahe an einander zu bringen suchen. Der Punkt $A = (A_1, A_2)$ werde nun nach der früheren Anleitung umgelegt, indem man aus dem Perpendikel A_1A' aus A_1 auf s und der zweiten Ordinate A_2A_a als Katheten die Hypotenuse $A'A_0$ construirt und diese auf dem ersten Perpendikel $A'A_1$ von A' aufträgt. Die früher besprochene Affinität liefert nun die weiteren Umlegungen.

Mit den rechtwinkligen Dreiecken ist controllirt worden.

109. *Es sei umgekehrt die Ebene* E *der Figur durch ihre beiden Spurlinien* s', s'' *gegeben und die Umlegung eines Polygons* $A_0B_0C_0D_0$; *es sollen die beiden Projectionen desselben construirt werden.* Es werde angenommen, dass die so umgelegte Figur sich in dem Theile von E oberhalb Π_1 befindet (Fig. 24).

Man construire den Neigungswinkel α' der Ebene E gegen Π_1, indem man in die Ebene irgend einen Punkt $P = (P_1, P_2)$ legt (Nr. 97); ist nun noch P_1P' das aus P_1 auf s' gefällte Loth*), P_2P_a die zweite Ordinate von P, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Katheten P_1P' und P_2P_a sind, der an ersterer anliegende spitze Winkel der verlangte Neigungswinkel α'.**)

---

*) In der Figur ist die zur Construction von P durch P_1 gelegte Gerade g_1 gleich normal zu s' gezogen.

**) Es wird bald (Nr. 118) gezeigt werden, wie man die Construction von α' möglichst vereinfacht.

Es sei nun A_0A' das aus A_0 auf s' gefällte Loth; in dem rechtwinkligen Dreiecke, das A_0A' zur Hypotenuse und α' zu dem einen spitzen Winkel hat, giebt die diesem anliegende Kathete die Entfernung $A'A_1$ des gesuchten Punktes A_1 von s', welche auf die Verlängerung von A_0A' aufzutragen ist, weil, wie hier leicht zu sehen ist, die Umlegung (um Collision der Figuren zu vermeiden) um den Nebenwinkel von α' geschehen ist, während die andere Kathete den Abstand AA_1 oder die zweite Ordinate A_2A_a giebt, welche nach unserer Annahme oberhalb der Projectionsaxe aufzutragen ist.

Hat man einmal die entsprechenden Punkte A_0, A_1, so kann man zu den übrigen Ecken der Umlegung nach der Affinität von Nr. 45, 47 die ersten Projectionen construiren.

Für die andere Affinität fehlt noch die Axe; sie geht durch den Punkt $s's''$. Man führe durch A (von dem man schon A_2 kennt) in E eine Gerade l, d. h. zieht durch A_1 die l_1 und construirt l_2 nach Nr. 95. Der Punkt l_1l_2 ist ein zweiter Punkt von m_{12}; der grösseren Genauigkeit wegen wird man für diese wichtige Linie lieber noch einen dritten Punkt construiren. Da nun A_1, A_2 (oder l_1, l_2) bekannt, können nach Nr. 107 die entsprechenden Punkte B_2, C_2, D_2 zu B_1, C_1, D_1 construirt werden.

110. Es ist aber doch die Bemerkung hieran zu knüpfen, dass die Anwendung der Affinität sich erst lohnt, wenn die Zahl der zu construirenden Punkte nicht zu klein ist, also besonders für eine Curve eine grössere Zahl von Punkten zu construiren ist. Ferner zeigt es sich bei der praktischen Ausführung, dass in Bezug auf Genauigkeit und bequeme Lage die wiederholte Construction mit den rechtwinkligen Dreiecken, die ja alle den Winkel α' (bez. α'') besitzen, vorzuziehen ist, indem bei der Affinitätsmethode es sehr auf die ersten Punkte ankommt, deren etwaige Ungenauigkeit solche bei allen weiteren nach sich zieht, während bei der anderen Methode die verschiedenen Punkte mehr von einander unabhängig erhalten werden. Auch stellen sich bei jener häufig schleifende Schnitte ein.

Es ist daher gut, wenn mit den beiden Methoden abgewechselt wird, oder wenn mit der einen Methode construirt, mit der andern controllirt wird; besonders das Schneiden entsprechender Linien, also auch z. B. entsprechender Tangenten bei Curven auf der Affinitätsaxe.

Zu versäumen ist aber die Controlle keineswegs.

111. Hinsichtlich der *Umlegung* ist schon in Nr. 55 erwähnt worden, dass *dieselbe oft statt um eine Spurlinie, z. B. s' in Π_1, um eine parallele, also hier erste Hauptlinie h' in die durch dieselbe parallel zu Π_1 gehende (der umzulegenden Figur nähere) Ebene Π_1' geschieht.* Es

wird, wie dort gesagt, die congruente Projection der Umlegung construirt. Zwischen dieser und der Projection der Figur selbst findet ebenfalls Affinität statt. An Stelle von s' ist h_1' getreten, und die zweiten Ordinaten sind gewissermassen verkürzt; sie sind die Entfernungen der zweiten Projectionen von h_2', welche ja die Spur- oder Schnittlinie (und Projection) von Π_1' in Π_2 ist. Liegen die zweiten Projectionen zweier Punkte auf verschiedenen Seiten von h_2', so befinden sich die ersten Projectionen der Punkte selbst und der Umlegungen auch auf verschiedenen Seiten von h_1'.

112. Die Umlegung, resp. Aufrichtung kann man auch *mit Hilfe von Hauptlinien* (siehe später Fig. 49 bei Nr. 156) vollziehen. Geschieht die Umlegung wieder um s' in Π_1, so construire man die Umlegung s_0'' von s'', indem man irgend einen Punkt S von s'' (S_1 auf a, S_2 auf s'') umlegt und die Umlegung mit $s's''$ verbindet. Man erhält dabei zugleich *die wahre Grösse des Winkels* (s', s''). Sei nun h' irgend eine erste Hauptlinie, also h_1' parallel s'; diese treffe a in Q_1; $Q_2 \equiv Q$ liegt auf s'' und h_2', welche parallel a ist; Q_0 liegt auf s_0'' ebenso weit von $s's''$ (und natürlich auf der richtigen Seite) wie $Q_2 \equiv Q$; durch ihn geht h_0' parallel s'. Ist also z. B. A_0 aufzurichten, so ziehe man durch ihn h_0' parallel s', erhält Q_0, Q_2, Q_1, durch Q_2 geht h_2' parallel zu a, durch Q_1 aber h_1' parallel zu s'. Die Senkrechte aus A_0 auf s' markirt auf h_1' den Punkt A_1, der nach h_2' als A_2 gelothet wird. Umgekehrt erhält man aus A_1 die Punkte A_0 und A_2.

Dritter Abschnitt.

Weitere Aufgaben.

113. a) *Durch eine Gerade g die Ebene zu legen, welche mit einer (zu g nicht parallelen) Geraden l parallel ist.*

Man ziehe durch einen Punkt von g die Parallele m zu l; m und g bestimmen die verlangte Ebene.

Man erspart sich in der einen Projectionsebene das Parallelziehen, wenn man z. B. $m_1 \equiv l_1$ nimmt; d. h. man verschiebt l parallel in ihrer ersten projicirenden Ebene, bis sie (als m) die g schneidet.

b) Legt man auch durch l die zu g parallele Ebene, so ist die Aufgabe gelöst: *durch zwei windschiefe Geraden die beiden zu einander parallelen Ebenen zu legen.*

c) *Durch einen Punkt P die Ebene zu legen, welche zwei gegebenen (nicht parallelen) Geraden g und l parallel ist.*

Die Parallelen durch P zu g und l bestimmen die verlangte Ebene.

Die Spurlinien der Ebene sind, wenn man sie wünscht, nach Nr. 102 a) zu construiren.

Die eben besprochenen Aufgaben sind nach Nr. 40 specielle Fälle der Aufgaben: Durch eine Gerade und einen Punkt (ausserhalb), bez. durch 3 Punkte (die nicht in gerader Linie liegen) die Ebene zu legen, haben deshalb nur eine Lösung und werden ebenso gelöst wie diese Aufgaben.

114. *Eine Ebene* E *ist* (durch ihre Spurlinien oder durch zwei sich schneidende Geraden) *gegeben; durch eine gegebene Gerade g die Ebene* Φ *zu legen, welche auf* E *normal ist.* Man fällt aus einem Punkte von g das Loth p auf E (Nr. 99, bez. 102); g und p bestimmen Φ. Ob g in E liegt oder nicht, ist gleichgültig.

Nach Nr. 42 ist diese Aufgabe ebenfalls ein specieller Fall der Aufgabe: Durch eine Gerade und einen Punkt (ausserhalb) die Ebene zu legen (daher nur eine Lösung, wenn g nicht selbst normal zu E ist), und wird auch ebenso gelöst.

115. *Durch einen Punkt P die Ebene zu legen, die auf einer Geraden g senkrecht steht.* Man lege zunächst irgend eine Ebene Φ normal zu g, d. h. ziehe durch einen beliebigen Punkt auf der Projectionsaxe s'_Φ normal zu g_1, s''_Φ normal zu g_2 (Nr. 99) und führe durch P die Parallelebene E zu Φ (Nr. 101).

Oder: Man ziehe die durch P gehenden Hauptlinien h', h'' der verlangten Ebene, also durch P_1 h_1' normal g_1, h_1'' parallel a, durch P_2 h_2' parallel a, h_2'' normal g_2. Die verlangte Ebene ist durch h', h'' bestimmt; die endlichen Spurpunkte dieser Geraden und der Parallelismus von s' mit h_1', s'' mit h_2'' geben s' und s'' von E.

Auch diese Aufgabe ist ein specieller Fall derselben Aufgabe, wie die vorige.

Construirt man noch den Punkt F, in welchem E die g trifft, so hat man in PF das Loth aus P auf g, also die Lösung der Aufgabe: *Aus einem Punkte P auf eine Gerade g das Loth zu fällen;* welche als besonderer Fall der Aufgabe: Durch einen Punkt P nach einer Geraden g eine andere unter gegebenem Winkel zu ziehen, später (Nr. 123) noch eine andere Lösung finden wird.

Die Aufgabe: Aus P auf g das Loth zu fällen, vereinfacht sich wesentlich, wenn g einer der beiden Projectionsebenen parallel ist (Nr. 57 c).

116. a) Durch einen Punkt P *die Gerade zu ziehen, welche zwei windschiefe Geraden* g *und* l *trifft.*

Die verlangte Gerade ist die Schnittlinie der beiden Ebenen Pg und Pl, oder verbindet P mit dem Schnittpunkte von Pg und l, und wird auch so construirt, und zwar auf die letztere Weise einfacher.

b) *Parallel zu einer Geraden* r *die Gerade zu ziehen, welche die windschiefen Geraden* g *und* l *trifft.*

Die verlangte Gerade ist die Schnittlinie (Nr. 102 f) der Ebenen, welche bez. durch g und l parallel zu r gehen und nach Nr. 113 a construirt werden, oder die Parallele zu r durch den Punkt, in dem die eine dieser beiden Ebenen, z. B. die, welche durch g parallel zu r geht, von l getroffen wird.

Diese Aufgabe ist nach der perspectivischen Ansicht ein specieller Fall von a) und wird, wie man sieht, ebenso gelöst.

c) *Den Schnittpunkt dreier Ebenen zu finden.* Man sucht die Schnittlinie von zweimal je zweien und hat in ihrem Schnittpunkt den gesuchten Punkt, durch den (als Controlle) die dritte Schnittlinie gehen muss, oder man sucht den Schnittpunkt der Schnittlinie zweier der drei Ebenen mit der dritten.

117. *Die Gerade, die auf zwei windschiefen Geraden* g *und* l *senkrecht steht (und beide schneidet), zu construiren* (Fig. 25).

Man lege zuerst durch eine der beiden Geraden, z. B. g, die Ebene E parallel zu l (Nr. 113 a); darauf construire man in $\mathsf{E} = mg$ nach Nr. 102 a) oder b) Spur- oder Hauptlinien, errichte in einem Punkte P von g das Loth n auf E und lege durch n, g die Ebene Φ; so steht Φ in g auf E senkrecht. Nun construire man den Punkt $F = \Phi l$ (Nr. 102 e). Die Parallele p durch F zu n (oder die Senkrechte zu E) ist die verlangte Gerade; p muss als Senkrechte zu E einen rechten Winkel mit g bilden und weil l zu E parallel ist, auch mit l. Letztere schneidet sie ersichtlich (in F); da sie aus dem Punkte F von Φ senkrecht zu E, auf der Φ normal ist, gezogen ist, so liegt sie in Φ und trifft demnach g (in N), was also in der Zeichnung Controlle ist.

Die wahre Länge FN — die kürzeste Entfernung von g und l — ist in der früher besprochenen Weise (Nr. 54, 55, 64) zu ermitteln.

Sind g und l beide zu Π_1 (oder Π_2) parallel, so haben wir schon in Nr. 58 gesehen, dass die Construction sich wesentlich vereinfacht.

118. In den folgenden Aufgaben werden *Winkel* als gegebene oder gesuchte Stücke vorkommen und finden dabei die im ersten Abschnitte Nr. 25 bis 31 erhaltenen Sätze Verwendung.

Die Aufgabe: *den Neigungswinkel einer Geraden* g *gegen eine Projectionsebene zu ermitteln*, ist in Nr. 54, 55, 64, ev. 69 erledigt.

Hinsichtlich der Ermittelung *des Neigungswinkels einer Ebene* E *gegen eine Projectionsebene*, z. B. gegen Π_1, ist die allgemeine Lösung schon bei Gelegenheit der Aufgabe von Nr. 109 gegeben worden; es handelt sich nun darum, diese oft gebrauchte Aufgabe graphisch so viel wie möglich zu vereinfachen (Fig. 26); dies ist besonders bei der Construction des Punktes P möglich; derselbe ist ganz beliebig in der Ebene; man wird ihn am besten auf die zweite Spurlinie s'' legen, weil man dann gleich weiss, dass $P \equiv P_2$ auf s'', $P_1 \equiv P_a$ auf a liegt. Indem man nun die Länge des aus P_1 auf s' gefällten Lothes $P_1 P'$ auf a von P_1 aus und an der andern Kathete $P_2 P_1$ unter dem schon vorhandenen rechten Winkel anträgt, erhält man das rechtwinklige Dreieck, welches α' liefert; es ist dies übrigens das durch die Umlegung des rechtwinkligen Dreiecks $P_2 P_1 P'$ um $P_2 P_1$ in die Π_2 entstandene.

Nähert sich s' der Normalität zur Axe, so nähert sich das Loth aus P_1 auf s' der Axe selbst und man sieht, wie wenn die Normalität eingetreten ist, also E auf Π_2 senkrecht steht, der Winkel (s'', a) der Neigungswinkel $\alpha' = (E, \Pi_1)$ geworden ist (Nr. 87).

Statt der Spurlinien s' kann man sich wieder einer ersten *Hauptlinie* h' bedienen, indem ja E mit jeder Parallelebene zu Π_1 denselben Winkel bildet, wie mit Π_1 selbst. Es habe P zunächst wieder beliebige Lage; so wird man aus den Lothen aus P_1 auf h_1' und aus P_2 auf h_2' als Katheten das rechtwinklige Dreieck construiren, in dem dann wieder der Gegenwinkel des letzteren der $\measuredangle\ \alpha'$ ist.

Dies empfiehlt sich besonders, wenn E durch zwei sich schneidende Geraden (oder durch eine Figur) bestimmt ist und die Spurlinie s' eine unbequeme Lage hat. Den Punkt P legt man dann offenbar auf eine der beiden Geraden (oder auf den Umfang der Figur). (Fig. 27.)

Die Lösung der Aufgabe: *die Spurlinie s' und der Neigungswinkel α' (gegen Π_1) einer Ebene* E *ist gegeben; die zweite Spurlinie s'' zu finden*, ist mit dem Vorhergehenden gegeben; es sind stets zwei Ebenen möglich (Nr. 48).

Wenn E *der Projectionsaxe parallel ist*, so giebt das rechtwinklige Dreieck, welches die Entfernungen der Spurlinien s' und s'' von a zu Katheten hat und welches durch den Schnitt einer zu a, s', s'' normalen Ebene mit Π_1, Π_2, E entsteht, zugleich. $\alpha' = (E, \Pi_1)$ und $\alpha'' = (E, \Pi_2)$.

119. *Durch eine gegebene Gerade g eine Ebene zu legen, welche Π_1 unter dem Winkel α' schneidet* (Fig. 28).

Es sei P ein beliebiger Punkt auf g; aus $P_2 P_a$ als einer Kathete und α' als Gegenwinkel werde das rechtwinklige Dreieck construirt

$P_2 P_a P''$; mit der andern Kathete schlage man um P_1 den Kreis; aus dem ersten Spurpunkt S_g' von g ziehe man an denselben die Tangenten. Es giebt zwei oder eine oder keine, je nachdem S_g' ausserhalb oder auf oder innerhalb des Kreises liegt; diese Tangenten sind die ersten Spurlinien von Ebenen, die der Aufgabe genügen; die zweite Spurlinie, welche durch S_g'' von g geht, ist im Allgemeinen leicht hinzuzufügen; trifft aber die erste Spurlinie die Axe auf dem Zeichenblatte nicht, so ist aus der Figur zu ersehen, wie man sich leicht noch einen zweiten Punkt für die zweite Spurlinie verschafft. Nun ist $S_g' P_1 = PP_1 \operatorname{cotg} \beta' = P_2 P_a \operatorname{cotg} \beta'$, wenn β' der Neigungswinkel von g gegen Π_1 ist; andererseits ist der Radius des Kreises $= P_2 P_a \operatorname{cotg} \alpha'$; es giebt mithin zwei oder eine oder keine Lösung, je nachdem $\operatorname{cotg} \beta' >$ oder $=$ oder $< \operatorname{cotg} \alpha'$, also $\beta' <$ oder $=$ oder $> \alpha'$ ist (Nr. 26).

Es giebt auch nur eine Lösung, wenn $\alpha' = 90^0$, weil dann die zweite Kathete verschwindet, also der Kreis in einen Punkt zusammenschrumpft.

120. Aehnlich ist die Aufgabe zu behandeln: *In einer Ebene* E (*deren Neigungswinkel gegen* Π_1 α' *sei*) *durch einen bekannten Punkt P eine Gerade unter gegebenem Winkel* β' *gegen* Π_1 *zu ziehen.* Die Punkte, in denen der um P_1 mit dem Radius $P_2 P_a \cdot \operatorname{cotg} \beta'$ geschlagene Kreis die erste Spurlinie s' von E trifft, sind die ersten Spurpunkte von Geraden, die der Aufgabe genügen. Es giebt also wieder zwei oder eine oder keine Lösung, je nachdem $\beta' <$ oder $=$ oder $> \alpha'$ ist; denn das Loth aus P_1 auf s' ist $P_2 P_a \operatorname{cotg} \alpha'$ (Nr. 25).

121. *Die wahre Grösse des Winkels zweier Geraden g und l zu finden.*

Es ist nicht nothwendig, dass die beiden Geraden in derselben Ebene liegen (Nr. 28); da man aber den Winkel zweier windschiefen Geraden durch Parallelverschiebung (s. Nr. 113 a) in den Winkel zweier sich schneidenden Geraden verwandeln kann, so betrachten wir nur den Fall, dass g und l einen Punkt (P) gemein haben (Fig. 29). Die beiden Geraden bestimmen dann eine Ebene; von derselben construirt man eine Spurlinie, z. B. s', oder bei unbequemer Lage eine erste Hauptlinie h' und legt die Ebene um s', bez. h' in Π_1, bez. die Parallelebene durch h' zu Π_1 um. Beim Umlegen bleiben die beiden ersten Spurpunkte von g und l, bez. ihre Begegnungspunkte mit h' (also in der Projection die Punkte $g_1 h_1'$ und $l_1 h_1'$) fest und man hat nur noch die Umlegung P_0 des Schnittpunktes P zu ermitteln, welche dann mit diesen festen Punkten durch g_0 und l_0 verbunden wird.

Ist etwa l parallel zu Π_1 (also $l_2 \parallel a$), so ist $l_1 \parallel s' \parallel h_1'$ und auch $l_0 \parallel s' \parallel h_1'$ (Nr. 36); l ist dann selbst eine erste Hauptlinie in der Ebene gl (Fig. 30).

Hat man es freilich mit dem Winkel zu thun, der von zwei bestimmten unter den vier Halbgeraden, die durch P auf g und l entstehen, gebildet wird, so muss man sich überzeugen, ob diese Halbgeraden (Schenkel) beide jene fest bleibenden Punkte enthalten; andernfalls erhält man durch die Umlegung den Neben- oder den Scheitelwinkel des gesuchten Winkels.

122. Jede *Theilung*, die bei einem Winkel überhaupt möglich ist, kann nun auch bei einem durch seine Projectionen dargestellten Winkel ausgeführt werden, indem man sie an dem umgelegten vornimmt und jede erhaltene Theilungslinie dann wieder aufrichtet, wobei ihr Begegnungspunkt mit der Geraden [z. B. s' oder eine h' der Ebene des Winkels], um welche umgelegt ist, fest bleibt, d. h. gleichzeitig Umlegung und erste Projection ist, während die zweite Projection auf a, bez. h_2' liegt. In Fig. 29 ist der Winkel (g, l) durch b halbirt.

123. Die in Nr. 115 erwähnte Aufgabe: *Durch einen Punkt P nach einer Geraden g unter gegebenem Winkel γ eine Gerade zu ziehen* (Fig. 31), wird einfach durch Umlegung der Ebene Pg und nachherige Wiederaufrichtung der in der Umlegung durch P_0 nach g_0 unter γ gezogenen Geraden t_0 gelöst, wobei natürlich (und so immer) die festen Punkte, wenn sie auf dem Zeichenblatte vorhanden sind, benutzt werden. Sind sie nicht vorhanden, so ist natürlich irgend ein Punkt der gewonnenen Geraden in der Umlegung in der früher beschriebenen Weise aufzurichten; am einfachsten ist der dem Punkte $T_0 = g_0 t_0$ entsprechende $T_1 = g_1 t_1$ zu finden, indem ja die Verbindungslinie normal zur ersten Spurlinie von Pg sein muss.

Die Aufgabe hat zwei Lösungen (in der Figur t und v), wenn $0 < \gamma < 90^0$; in diesen Grenzfällen nur eine Lösung; bei $\gamma = 0^0$ ist natürlich die Construction wesentlich einfacher.

124. *Den Neigungswinkel einer Geraden g gegen eine Ebene E zu construiren.*

a) Man führt durch g die Ebene Φ normal zu E (Nr. 114), construirt die Schnittlinie $k = \Phi E$ (Nr. 102 f) und sucht durch Umlegung den spitzen Winkel (g, k) nach der Nr. 121. Oder einfacher:

b) Man fällt aus irgend einem Punkte von g auf E das Loth p (Nr. 99 oder 102), sucht den spitzen Winkel (g, p) durch Umlegung und erhält dadurch den Complementwinkel des gesuchten Winkels (Nr. 29).

125. *Den Neigungswinkel zweier Ebenen* Ε *und* Φ *zu finden.*

a) Man sucht die Schnittlinie $k = \mathsf{E}\Phi$, errichtet auf ihr irgend eine senkrechte Ebene Δ (Nr. 115 Anf.), sucht die Schnittlinien ΔΕ und ΔΦ und durch Umlegung deren Winkel. Oder einfacher:

b) Man fällt aus irgend einem Punkt die Lothe p und q auf die beiden Ebenen und sucht durch Umlegung die wahre Grösse des spitzen ∢ (p, q), denn derselbe ist nach Nr. 30 dem spitzen ∢ (Ε, Φ) gleich.

126. *Eine Ebene* Ε *ist gegeben und in ihr eine Gerade g; es soll durch letztere eine Ebene* Φ *gelegt werden, welche mit* Ε *den Winkel* α *bildet* (Fig. 32).

Jede Ebene, welche zu g normal ist, wird in Ε und Φ die Schenkel des Neigungswinkels einschneiden. Man construire also eine solche Ebene Δ, d. h. ziehe aus irgend einem Punkte der Projectionsaxe s'_Δ normal g_1, s''_Δ normal g_2, ermittele die Schnittlinie $t = \Delta\mathsf{E}$ und den auf ihr befindlichen Punkt $N = g\Delta$, lege die Ebene Δ, z. B. um s'_Δ (oder event. eine h'_Δ) in Π_1 um und construire t_0 und N_0 (N_0 muss auf g_1 fallen). In N_0 lege man an t_0 den Winkel α an; sei m_0 der zweite Schenkel, so ist derselbe also die umgelegte Linie ΔΦ; er werde aufgerichtet; trifft m_0 die s'_Δ in M_1, so liegt M_2 auf a und N_1M_1 ist m_1, N_2M_2 ist m_2. Die verlangte Ebene Φ ist durch g und m bestimmt und können, wenn nothwendig, ihre Spurlinien nach Nr. 102 a gefunden werden, was in der Figur geschehen ist.

Da die Winkelantragung, ausser wenn $\alpha = 0^0$ oder 90^0 ist, auf zwei Weisen geschehen kann, so hat die Aufgabe zwei Lösungen (die Figur enthält blos eine). Ist $\alpha = 0^0$, so fällt Φ mit Ε zusammen, also hat die Aufgabe keinen Sinn; ist $\alpha = 90^0$, so wird sie einfacher nach Nr. 114 gelöst.

127. Dieselbe Aufgabe soll für den Fall gelöst werden, *wenn g ausserhalb* Ε *liegt* (Fig. 33).

Es sei P ein beliebig auf g gewählter Punkt; so fälle man aus ihm das Loth p auf Ε, suche dessen Fusspunkt F und ermittele die wahre Länge von PF; man construire ferner den Schnittpunkt $D = g\mathsf{E}$, lege die Ebene Ε z. B. um ihre erste Spurlinie s'_E (event. eine erste Hauptlinie, worauf jedoch der Einfachheit wegen hier und fernerhin nicht näher eingegangen werde) um und ermittele die Umlegungen F_0 und D_0 von F und D. Die Ebenen, welche durch den Punkt P gehen und mit Ε den Winkel α bilden, schneiden in Ε Linien ein (welche man ihre Ε-Spurlinien nennen kann), die von dem Fusspunkte F die Entfernung $PF \cdot \operatorname{cotg} \alpha$ haben, also den Kreis tangiren, der um F mit dieser Entfernung construirt ist; sie sind demnach die Be-

rührungsebenen des geraden Kreiskegels oder Rotationskegels, welcher P zur Spitze und diesen Kreis zum Grundkreis hat.

Diesen Kreis (K_0) construire man nun in der Umlegung um F_0. Führt man dann von D_0 die Tangenten an ihn, so sind dies die umgelegten E-Spurlinien derjenigen mit E den Winkel α bildenden Ebenen, welche nicht blos durch P, sondern durch g gehen, also der verlangten Ebenen. Jede dieser E-Spurlinien (in der Figur ist blos eine t gezogen) richtet man auf, wobei man event. D und den Punkt $t_0 s'_E$ benutzt, welcher letztere fest bleibt. Mit jeder dieser Spurlinien bestimmt g eine der verlangten Ebenen.

Die Entfernung $DF = D_0 F_0$ ist gleich $PF \cdot \cot \beta$, wenn $\beta = \sphericalangle (g, E)$ ist. Es werden mithin zwei oder eine oder keine Tangente von D_0 an K_0, also zwei Ebenen, oder eine, oder keine möglich sein, je nachdem $PF \cdot \cot \beta >$ oder $=$ oder $< PF \cot \alpha$, folglich je nachdem $\alpha >$ oder $=$ oder $< \beta$ ist. Ist $\alpha = 90^0$, so ist $PF \cdot \cot \alpha = 0$, also reducirt sich der Kreis auf den Punkt F (bez. F_0); die Tangenten vereinigen sich stets in die Linie $D_0 F_0$; mithin giebt es nur eine Lösung (Nr. 26 und zur Vergleichung Nr. 119).

Die Aufgabe wird dann freilich nach Nr. 114 einfacher gelöst.

In der vorigen Aufgabe war $\beta = 0^0$, also giebt es niemals keine Lösung.

Wenn die Aufgabe gestellt ist: Durch g die Ebene zu legen, welche mit E den kleinsten Winkel (β) bildet, in der also g Falllinie gegen E ist, so ist deren E-Spurlinie offenbar die Senkrechte durch D zu DF; der Kreis K geht in diesem Fall durch D.

128. *Es sind zwei Ebenen* E *und* Φ *gegeben und in* Φ *ein Punkt* P*; durch denselben soll in* Φ *eine Gerade gezogen werden, welche mit* E *den Winkel* β *bildet* (Fig. 34).

Man construire die Schnittlinie $k = E\Phi$, fälle aus P auf E das Loth, construire dessen Fusspunkt F und wahre Länge PF; lege E um (z. B. um s'_E), schlage um F_0 mit dem Radius $PF \cdot \cot \beta$ den Kreis K_0. Die Punkte, in denen derselbe k_0 trifft, sind die umgelegten Schnittpunkte der verlangten Linien mit E, ihre E-Spurpunkte. Dieselben richtet man mit E wieder auf. Die Aufgabe hat also zwei Lösungen, eine oder keine, je nachdem die Entfernung der Geraden k von F (oder k_0 von F_0) $<$ oder $=$ oder $>$ als $PF \cot \beta$ ist; mithin, da diese Entfernung gleich $PF \cdot \cot \alpha$ ist, wenn $\alpha = \sphericalangle (E, \Phi)$, je nachdem $\beta <$ oder $=$ oder $> \alpha$ ist (Nr. 25).

Will man durch P die Gerade in Φ, welche gegen E die grösste Neigung (α) hat, also Falllinie gegen E ist, so erhält man als ihren umgelegten E-Spurpunkt den Fusspunkt des Lothes aus F_0 auf k_0: der obige Kreis berührt dann die Gerade k_0.

129. *Es sind zwei windschiefe Geraden g und l gegeben: durch g soll die Ebene gelegt werden, welche mit l den Winkel β bildet.*

Man errichtet auf l irgend eine normale Ebene E und legt nach Nr. 127 durch g die beiden Ebenen, welche gegen E unter dem Winkel $90^0 - \beta$ geneigt sind. Es wird sich auch hier herausstellen, dass es zwei Lösungen oder eine oder keine giebt, je nachdem $\beta <$ oder $=$ oder $> \gamma$, wenn $\gamma = \sphericalangle (g, l)$ ist (Nr. 31).

Man bekommt die Ebene durch g, welche gegen l den grössten Neigungswinkel, nämlich γ, hat, wenn man die Ebene sucht, welche mit E den $\sphericalangle\ 90^0 - \gamma$ bildet, d. i. den, welchen g mit E bildet.

Sie steht auf der durch g zu l parallel geführten Ebene senkrecht und kann also auch durch Nr. 114 erhalten werden.

Vierter Abschnitt.

Drehung der dargestellten Gebilde um Axen.

130. Es ist sehr häufig der Fall, dass die Darstellung eines räumlichen Gebildes in einer gewissen Stellung sehr einfach ist, aber ein wenig anschauliches Bild giebt. Das einfachste und schlagendste Beispiel liefert der Würfel, wenn zwei von seinen Flächenpaaren den beiden Projectionsebenen parallel sind. Die beiden Projectionen bestehen dann blos aus Quadraten, indem sich vier Flächen auf gerade Linien reducirt haben.

Solche Gebilde erhalten dann anschaulichere Projectionen, wenn *man sie im Raume um eine Axe dreht, die auf einer der beiden Projectionsebenen senkrecht steht.* Es sei also diese Drehaxe d' *senkrecht auf* Π_1, so dass ihre erste Projection d_1' ein Punkt, ihre zweite d_2' (durch d_1' gehend) zur Grundlinie a normal ist.

Bei der Drehung um d' beschreibt jeder Punkt P des Raumes einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt auf d' liegt und dessen Ebene zu d' normal, also zu Π_1 parallel und auf Π_2 senkrecht ist. Daraus geht hervor, dass *die erste Projection P_1 sich ebenfalls auf einem Kreisbogen um d_1' bis z. B. P_1^* bewegt und die zweite auf einer Parallelen zur Grundlinie bis P_2^*, so dass $P_1^* P_2^*$ normal zu a ist.*

Die Centriwinkel, die zu den von verschiedenen Punkten (und ihren ersten Projectionen) bei derselben Drehung beschriebenen Kreisbögen gehören, haben offenbar gleiche Grösse und Drehrichtung, und werden diese Bögen deshalb, um die gleichen Centriwinkel zu erhalten,

am besten auf einen alle umschliessenden concentrischen Kreis übertragen.

131. Man erhält durch diese Drehung ein neues Mittel, *den Neigungswinkel einer Geraden g gegen die Projectionsebene, auf der die Drehaxe senkrecht ist,* also hier Π_1, *zu ermitteln, sowie die wahre Länge einer Strecke PQ, die auf ihr liegt* (Fig. 35).

Man legt die Drehaxe durch den einen Endpunkt, z. B. Q, so dass $Q_1 \equiv d_1'$; dadurch erspart man sich die Drehung von Q; dieser Punkt bleibt fest. Man bewege nun P_1 auf einem Kreisbogen um Q_1 bis P_1^*, so dass $Q_1 P_1^* \parallel a$ ist, also QP^* parallel Π_2; P_2 bewegt sich dabei auf der Parallelen zu a bis P_2^*. Offenbar ist nun $Q_2 P_2^*$ gleich der wahren Länge QP (Nr. 10); ferner ist der Neigungswinkel β von $g = QP$ gegen Π_1 in wahrer Grösse durch den Winkel, welchen $Q_2 P_2^*$ mit a (oder mit $P_2^* P_2$) bildet (Nr. 69), dargestellt.

Umgekehrt, *soll auf einer einseitig (in Q) begrenzten Geraden nach der einen Seite hin eine Strecke von gegebener Länge aufgetragen werden,* so nimmt man erst einen beliebigen Punkt P auf g, dreht QP nach $QP^* = g^*$, wie eben beschrieben, trägt dann auf $Q_2 P_2^*$ von Q_2 die gegebene Strecke auf bis R_2^*, erhält durch Lothen auf $Q_1 P_1^*$ den Punkt R_1^* und dreht wieder zurück nach R auf g oder gelangt von R_2^* parallel zu a zu R_2 auf g_2 und erhält R_1 durch Lothen.

Der erste Spurpunkt von g bleibt bei der Drehung um d fortwährend auf der Geraden derselbe Punkt und beschreibt in Π_1 einen Kreis um d_1', während der andere sich verändert; auch der Neigungswinkel gegen Π_1 (wie der zu ihm complementäre gegen d) bleibt, auch wenn g nicht d trifft, constant, worauf ja gerade die vorhergehende Construction dieses Neigungswinkels beruht.

132. *Wird eine Ebene* E *gedreht* (Fig. 36), so bleibt der Punkt $U = \mathsf{E}d$ fest, ebenso bleiben die Neigungen (E, d) und (E, Π_1) constant; die erste Spurlinie s' bleibt in der Ebene dieselbe Linie, während sie in Π_1 einen Kreis um d_1' umhüllt; derselbe Kreis wird von dem ersten Spurpunkte der durch $\mathsf{E}d$ gehenden ersten Falllinie von E beschrieben.

Die zweite Spurlinie s'' verändert sich auch in der Ebene selbst. Um die neue zweite Spurlinie $^*s''$ für irgend eine Lage von $^*s'$ zu haben, muss man in E eine Gerade g besitzen, welche man dreht; der Centriwinkel, der zu dem von jedem Punkte von g beschriebenen Kreisbogen gehört, ist gleich dem Winkel, welcher von den nach den Berührungspunkten von s' und $^*s'$ gezogenen Radien, also von s' und $^*s'$ selbst gebildet wird. Am einfachsten gestaltet sich die Construction,

wenn g die eben genannte Falllinie ist, denn ihr erster Spurpunkt S', bez. $*S'$ ist der Berührungspunkt von s' und $*s'$.

Kommt durch die Drehung s' in senkrechte Lage s'^* zur Grundlinie a, also E zu Π_2, so ist der Winkel zwischen a und s''^* *der Neigungswinkel* (E, Π_1) *in wahrer Grösse* (Nr. 118). Bei dieser Lage ist die eben genannte Falllinie parallel zu Π_2; da dann s''^* ihre zweite Projection ist, so sieht man wiederum deutlich, dass die Neigungswinkel einer Ebene und ihrer ersten Falllinien gegen Π_1 gleich sind.

Es ist nicht schwer zu erkennen, dass der blos zu diesem Zwecke nothwendige Theil der Figur in die Figur 26 übergeht, wenn d' in Π_2 gelegt wird.

133. Da der Neigungswinkel einer Ebene gegen Π_1 bei der Drehung um eine auf Π_1 normale Axe erhalten bleibt, so bleiben z. B. auch alle zu Π_1 parallelen Ebenen parallel und alle zu Π_1 normalen normal. Die Geraden, in welche sich Figuren in solchen Ebenen in Π_2, bez. Π_1 projiciren, gehen noch nicht in ordentliche Figuren über. Es ist daher oft nothwendig, *zwei Drehungen hinter einander vorzunehmen*, die eine um eine Axe d' normal auf Π_1, die andere um eine Axe d'' normal auf Π_2. Bei einer Ebene, die zu der einen Projectionsebene parallel ist, entfernt man ihre Normalität zur andern nur dadurch, dass man zuerst um eine zu der letzteren senkrechte Axe dreht, nicht bei der umgekehrten Reihenfolge.

Um *Collision* der Projectionen der ursprünglichen und der gedrehten, bez. wiederholt gedrehten Figur zu vermeiden, legt man entweder den Fusspunkt der Drehaxe ausserhalb der Figur, oder wenn Symmetriegründe einen Punkt innerhalb (z. B. einen etwaigen Mittelpunkt) für geeignet erscheinen lassen, verschiebt man die gedrehte Figur parallel zur Projectionsaxe, wobei man blos nothwendig hat, die sämmtlichen Projectionen, sei es in Π_1 oder in Π_2, um eine gleiche Strecke parallel zu a zu verschieben.

134. Durch zwei Drehungen um d' und d'' kann man auch umgekehrt *eine Ebene parallel zu einer Projectionsebene machen*, also die Projection einer ebenen Figur zur Congruenz mit der Figur selbst bringen. Man dreht die Ebene um d', bis s'^* normal a ist; darauf um d'', bis s''^{**} parallel a ist. Durch die erste Drehung ist die Ebene senkrecht zu Π_2 geworden und bleibt es bei der zweiten, kann also parallel zu Π_1 werden.

Ebenso kann man *eine Gerade g zum Senkrechtstehen auf der einen Projectionsebene bringen.* Dreht man z. B. g zuerst um d', bis sie parallel Π_2 ist, so kann man nun durch eine Drehung um d'' sie senkrecht zu Π_1, d. h. ihre zweite Projection normal zu a machen. Einen

Würfel z. B., dessen ursprüngliche Projectionen zwei Quadrate sind, kann man durch zweimalige Drehung so stellen, dass die Diagonale zwischen zwei Gegenecken normal zu Π_1 ist. Die 12 Kanten projiciren sich dann in Π_1 als die sechs Seiten und die sechs Hälften der drei Hauptdiagonalen eines regelmässigen Sechsecks: alle haben dann gleiche Neigungen gegen Π_1; deshalb projiciren sich alle zwölf gleich gross und auch die Winkel zwischen zwei Kanten haben gleiche Projectionen in Π_1 (Nr. 33).

Fünfter Abschnitt.

Einführung weiterer Projectionsebenen.

a. Die neue Projectionsebene steht auf beiden früheren senkrecht.

135. Wir denken uns *eine dritte Projectionsebene* Π_3 *eingeführt, welche zu* Π_1 *und* Π_2, *also zur Projectionsaxe* a, die jetzt a_{12} heissen soll, *senkrecht ist* (Querriss, Seitenriss, Profil). Es ergeben sich *zwei neue Projectionsaxen* $\Pi_1\Pi_3 = a_{13}$ und $\Pi_2\Pi_3$, welche beide auf a_{12} in demselben Punkte senkrecht stehen, dem Schnittpunkt O der drei Ebenen Π_1, Π_2, Π_3. Wird nun Π_2 um a_{12} in Π_1 umgelegt, so fällt $\Pi_2\Pi_3$ als a_{23} auf dieselbe Linie wie a_{13} (senkrecht zu a_{12}). Wird auch Π_3 um a_{13} in Π_1 umgelegt, und zwar so, dass der obere Theil von Π_3 (Π_3+), der auf derselben Seite von Π_1^+ sich befindet wie Π_2+, nach rechts fällt, so fällt nun $\Pi_2\Pi_3$ als a_{23}^* auf a_{12}, und es entspricht also jedem Punkt P_{23} von $a_{23} \equiv a_{13}$ ein Punkt P_{23}^* von $a_{23}^* \equiv a_{12}$, der von O eben weit absteht, wie jener, und zwar, wenn P_{23} auf a_{23} oberhalb (unterhalb) O lag, rechts (links) von O fällt, so dass die Bewegung auf dem Quadranten von P_{23} nach P_{23}^* in der Richtung der Uhrzeigerbewegung geschieht.

Dadurch, dass Π_3 und Π_2 beide in Π_1 umgelegt sind, besteht natürlich ein ähnlicher Zusammenhang zwischen Π_1 und Π_3, als zwischen Π_1 und Π_2; dagegen ist der zwischen Π_2 und Π_3 nicht so unmittelbar.

Wie die aus P_1 und P_2 auf a_{12} gefällten Lothe a_{12} in demselben Punkte P_{12} (früher P_a genannt) treffen, so *werden auch die aus* P_1 *und der dritten Projection* P_3 *des Punktes* P *auf* a_{13} *gefällten Lothe* a_{13} *in demselben Punkte* P_{13} *treffen* (oder — bei übereinandergelegten Ebenen — es wird P_1P_3 zu a_{13} senkrecht sein), *während man durch die Lothe*

aus P_2 auf a_{23}, aus P_3 auf a_{23}^* zu entsprechenden Punkten P_{23} und P_{23}^* gelangt. Zwischen diesen Lothen (Ordinaten) und den Abständen des Punktes P von den drei Projectionsebenen finden offenbar folgende Gleichheiten statt:

$$P_2 P_{12} = P_3 P_{13} = P P_1;$$
$$P_1 P_{12} = P_3 P_{23}^* = P P_2;$$
$$P_1 P_{13} = P_2 P_{23} = P P_3.$$

Liegt $P_2 P_{12}$ oberhalb (unterhalb) a_{12}, so muss die gleiche Ordinate $P_3 P_{13}$ rechts (links) von a_{13} fallen; da oberhalb a_{12} die Halbebene Π_2+ und rechts von a_{13} die Halbebene Π_3+ liegt, so haben also die gleichen Ordinaten $P_2 P_{12}$ und $P_3 P_{13}$ stets auch gleiches Vorzeichen.

136. *Die dritte Projection P_3 eines Punktes P zu zeichnen, von dem die erste und zweite Projection bekannt sind* (Fig. 37). Man ziehe $P_1 P_{13}$ normal a_{13} und trage auf dieser Ordinatenlinie $P_3 P_{13} = P_2 P_{12}$ auch dem Vorzeichen nach auf; oder, was aber umständlicher ist: man ziehe $P_2 P_{23}$ normal a_{23}, übertrage P_{23} nach P_{23}^*, ziehe $P_{23}^* P_3$ normal a_{23}^* und auch dem Vorzeichen nach gleich $P_{12} P_1$; oder durch Vereinigung beider Operationen: man ziehe die Gerade $P_1 P_{13}$ normal a_{13} unbestimmt lang, ebenso $P_2 P_{23}$ normal a_{23}, übertrage P_{23} nach P_{23}^*, ziehe in P_{23}^* zu a_{13} die Normale, welche die $P_1 P_{13}$ in P_3 treffen muss.

Ebenso soll aus P_1, P_3 die zweite oder aus P_2, P_3 die erste Projection gefunden werden.

137. *Die dritte Projection g_3 einer Geraden $g = (g_1, g_2)$* findet man, indem man die dritten Projectionen zweier beliebiger Punkte von g ermittelt. In welcher Beziehung stehen *die drei Spurpunkte S', S'', S'''*? Der Punkt $g_3 a_{13}$ ist der Fusspunkt des aus S' auf a_{13} gefällten Lothes, der Punkt $g_3\ a_{23}^*$ der Fusspunkt des aus S'' auf a_{13} gefällten Lothes, nach a_{23}^* übertragen. Das Loth auf a_{13} im Punkte $g_1 a_{13}$ oder das Loth auf a_{23}^* in dem entsprechenden Punkte des Punktes $g_2 a_{23}$ markirt auf g_3 den Spurpunkt S'''. Als besonders bemerkenswerth kann noch gelten: Ist $g \parallel \Pi_1$, so sind g_2 und g_3 bez. parallel zu a_{12}, a_{13} in gleichem Abstande; ist $g \parallel \Pi_2$, so fallen g_1 und g_3 in dieselbe zu $a_{12} \equiv a_{23}^*$ parallele Linie; ist $g \parallel \Pi_3$, so fallen g_1 und g_2 in dieselbe zu $a_{13} \equiv a_{23}$ parallele Linie.

138. In Bezug auf *die drei Spurlinien einer Ebene* ist leicht zu erkennen, dass, wie sich s' und s'' auf a_{12}, so auch s' und s''' auf a_{13} treffen, während s'' und s''' den Axen a_{23} und a_{23}^* bez. in entsprechenden Punkten begegnen (Fig. 37).

139. Die dritte Projectionsebene ist besonders erwünscht für *solche Geraden, die durch ihre beiden ersten Projectionen nicht vollständig bestimmt sind,* d. i. die in zu a_{12} normalen Ebenen sich befinden (Nr. 76). Zunächst ist jede solche Gerade g durch ihre dritte Projection und eine der beiden andern dann ebenso eindeutig bestimmt wie die andern Geraden (die dritte Projection wird aus den beiden Punkten erhalten, durch deren erste und zweite Projectionen die Gerade bestimmt war). Das unmittelbare Lothen ist bei diesen Geraden ersichtlich nie möglich; hat man also z. B. die erste Projection P_1 eines Punktes einer solchen Geraden g, so muss man erst g_3 construiren, P_1 auf g_3 als P_3 lothen, wodurch sich dann P_2 ergiebt, indem $P_3P_{13} = P_2P_{12}$ ist (oder man benutzt die in Nr. 66 erwähnte Proportionalität). Ferner ist klar, dass ja wegen ihres Parallelismus mit Π_3 jede auf einer derartigen Geraden gelegene Strecke sich in Π_3 in wahrer Grösse darstellt, die Winkel, die sie mit Π_1 und Π_2 oder mit einer auf Π_1, bez. Π_2 senkrechten Linie bildet, in den $\sphericalangle (g_3, a_{13})$, $(g_3, a_{23}{}^*)$ bez. deren Complementwinkeln und der Winkel zweier solchen Geraden g, l in dem $\sphericalangle (g_3, l_3)$ in wahrer Grösse zu sehen sind (Nr. 58, 69).

Liegen g und l in derselben (zu a_{12} normalen) Ebene, so dass $g_1 \equiv l_1 \equiv g_2 \equiv l_2$, so ist der Punkt $g_3\,l_3$ die dritte Projection ihres Schnittpunktes, dessen andere Projectionen dann leicht zu finden sind.

140. Ebenso bietet Π_3 hinsichtlich *der zu a_{12} parallelen Geraden und Ebenen* einige Vortheile; dieselben projiciren sich auf Π_3 als Punkte, bez. Gerade. Soll z. B. durch einen Punkt P und eine zu a_{12} parallele Gerade g die Ebene gelegt werden, so hat man in der Verbindungslinie der Punkte P_3 und g_3 unmittelbar die dritte Spurlinie (und dritte Projection) dieser Ebene, die dann leicht zu den beiden andern (zu a_{12} parallelen) Spurlinien führt (Nr. 138).

Die Strecke P_3g_3 ist die wahre Länge des Lothes aus P auf g (Nr. 57 b).

Wenn E eine zu a_{12} parallele Ebene ist, so stellen sich die Neigungswinkel $\alpha' = (\mathsf{E}, \Pi_1)$ und $\alpha'' = (\mathsf{E}, \Pi_2)$ in den Winkeln, welche die dritte Spurlinie (Projection) von E mit a_{13} und $a_{23}{}^*$ bildet, dar; und wenn Φ eine zweite zu a_{12} parallele Ebene ist, so ist der Winkel (E, Φ) gleich dem von den beiden dritten Spurlinien gebildeten; der Schnittpunkt derselben ist die dritte Projection der Schnittlinie $\mathsf{E}\Phi$ (Nr. 57 e).

Die Entfernung eines Punktes P von einer zu a_{12} parallelen Ebene E ist gleich dem Lothe aus P_3 auf die dritte Spurlinie (Projection) dieser Ebene (Nr. 57a). Der Schnittpunkt einer beliebigen Geraden

mit einer solchen Ebene ergiebt sich am schnellsten in der dritten Projection (Nr. 98 a).

141. Bei Winkelbestimmungen zwischen Geraden und Ebenen (Nr. 121, 124, 125) sind natürlich Gerade, die zu a_{12} normal sind, mögen sie nun unter den gegebenen Geraden selbst sich befinden, oder als Lothe zu gegebenen Ebenen, welche parallel a_{12} sind, auftreten (Nr. 124b, 125b), unbequem; es möge daher an zwei derartigen Aufgaben gezeigt werden, wie die dritte Projectionsebene benutzt wird.

a) *Eine beliebige Ebene* E *ist gegeben und eine zu* a_{12} *normale Gerade* g, *zunächst bestimmt durch zwei Punkte* M, N; *man sucht den Winkel* $g\mathsf{E}$ (Fig. 38). Aus M_1, M_2; N_1, N_2 construire man M_3, N_3 und damit g_3; das Loth auf a_{13} in $a_{13}\ g_3$ trifft g_1 im ersten Spurpunkte von g. Auf g_3 werde noch ein beliebiger Punkt P_3 angenommen und aus ihm P_1 und P_2 abgeleitet auf g_1 bez. g_2 (wobei $P_1 P_3 \perp a_{13}$ und $P_2 P_{12} = P_3 P_{13}$ auch dem Vorzeichen nach); aus P wird auf E das Loth p gefällt. Die weiteren Constructionen zur Ermittelung des Winkels (g, p), des Complements des gesuchten, sind dieselben wie im allgemeinen Falle.

b) *Der Winkel zweier Ebenen* E *und* Φ, *von denen die eine* E *zu* a_{12} *parallel ist, soll mit Hilfe der Lothe* (Nr. 125b) *ermittelt werden* (Fig. 39).

Das Loth p auf E gehört zu den unbestimmten Geraden; es handelt sich vorzugsweise um den einen Spurpunkt von p, z. B. den ersten. Wir construiren s_{E}''' und P_3, die dritte Projection des Punktes $P = pq$, wo q wie in der cit. Nr. das Loth auf Φ ist; die Normale aus P_3 auf s_{E}''' ist p_3, und die Ordinate auf a_{13} in $p_3\ a_{13}$ giebt auf p_1 den gesuchten Spurpunkt.

142. Auch in dem Falle, in dem die Schnittpunkte der gleichnamigen Spurlinien zweier Ebenen E, Φ nur einen Punkt der Schnittlinie $\mathsf{E}\Phi$ geben, weil E und Φ die Projectionsaxe in demselben Punkte treffen (Nr. 92), kann die dritte Projectionsebene mit ihren beiden Spurlinien s_{E}''', s_{Φ}''' dazu benutzt werden, um einen weiteren Punkt W von $\mathsf{E}\Phi$ zu erlangen. Sei $W \equiv W_3 = s_{\mathsf{E}}''' s_{\Phi}'''$, so liegt W_1 auf a_{13} und W_2 auf a_{23}. Aehnliches gilt, wenn ein Schnittpunkt gleichnamiger Spurlinien ungünstig liegt.

b. Die neue Projectionsebene steht nur auf einer der früheren senkrecht.

143. Es werde jetzt *eine dritte Projectionsebene* Π_3 eingeführt, welche *nur noch auf einer der beiden gegebenen, z. B. auf* Π_1, *normal ist* und, Π_2

ersetzend, mit Π_1 ein eben solches Projectionsebenen-System bildet wie vorher Π_1 und Π_2.

Die Linie $\Pi_2 \Pi_3$ ist, so lange Π_2 und Π_3 noch nicht in Π_1 umgelegt sind, sowohl zu $a_{12} = \Pi_1 \Pi_2$, als zu $a_{13} = \Pi_1 \Pi_3$ in demselben Punkte O senkrecht. Wird sie aber als a_{23} mit Π_2 umgelegt, so bleibt sie nur auf a_{12} senkrecht (in O), ihre Umlegung mit der Ebene Π_3 hingegen bewahrt nur ihre Normalität zu a_{13} (in O). Es ist nun wieder darauf zu achten, auf welche Seite die Halbebene Π_3+ fällt, die sich auf der nämlichen Seite von Π_1 befindet wie Π_2+; auf diese Seite von a_{13} fallen die dritten Projectionen derjenigen Punkte, deren zweite Projectionen oberhalb a_{12} liegen. Bei dem ersten Punkte eines Gebildes, dessen dritte Projection gesucht wird, hat man noch Freiheit, dieselbe auf die eine oder andere Seite von a_{13} zu legen, d. h. Π_3+ nach der einen oder der andern Seite umzulegen. *Sei P dieser erste Punkt; so gilt für jeden weiteren Punkt Q, dass Q_3 und P_3 auf dieselbe oder verschiedene Seiten von a_{13} fallen, je nachdem Q_2 und P_2 auf derselben oder verschiedenen Seiten von a_{12} liegen* (Fig. 40).

Ferner ist auch hier, wie $P_1 P_2$ in P_{12} auf a_{12} senkrecht steht, *$P_1 P_3$ auf a_{13} in P_{13} normal und $P_3 P_{13} = P_2 P_{12}$* auch dem Vorzeichen nach. Auf a_{23} und a_{23}^* giebt es natürlich auch in diesem Falle entsprechende Punkte*), welche vor den beiden Umlegungen vereinigt waren, und, gleichweit entfernt von O, auf entsprechenden Seiten von a_{12} und a_{13} liegen. Was über Gerade und Ebenen im vorigen Falle gesagt ist, bleibt bestehen; der Unterschied ist ja auch nur der, dass dort der $\sphericalangle (a_{23}, a_{23}^*) = 90^0$, hier von 90^0 verschieden ist. Hinsichtlich der Ermittelung der dritten Spurlinie s''' einer Ebene, welche ja die a_{13} in dem Punkte $a_{13} s'$ und die a_{23}^* in dem entsprechenden Punkte von $a_{23} s''$ treffen muss, mag noch auf eine etwaige unbequeme Lage eines dieser Punkte Rücksicht genommen werden (Fig. 36). Man nehme dann einen Punkt R_1 auf a_{13} an, suche R_2 so, dass R in der Ebene E liegt (Nr. 97), construire R_3, welches auf s''' liegen muss.

144. Mit Hilfe der dritten Projectionsebene lassen sich nun z. B. folgende Aufgaben lösen:

a) *Die wahre Grösse einer Strecke PQ zu finden;* man hat dann Π_3 ausser senkrecht auf Π_1 noch parallel PQ zu stellen, also a_{13} parallel mit $P_1 Q_1$ zu ziehen; $P_3 Q_3$ ist dann $= PQ$.

b) *Den Neigungswinkel β' einer Geraden g gegen Π_1 zu finden;* Π_3

---

*) Die Namen a_{23} und a_{23}^* sind in den Figuren 40 und 42 an die entsprechenden Halbaxen geschrieben.

ist ebenfalls parallel g, also a_{13} parallel g_1 zu legen; $\sphericalangle(g_3, a_{13})$ ist dann der verlangte Winkel.

Macht man in a) und b) a_{13} identisch mit P_1Q_1 bez. mit g_1, also Π_3 mit der ersten projicirenden Ebene von PQ oder g, so ergiebt sich genau die Figur von Nr. 54, 64.

c) *Den Neigungswinkel* α' *einer Ebene* E *gegen* Π_1 *zu finden;* Π_3 muss dann senkrecht zur ersten Spurlinie s' sein, mithin muss dies auch bei a_{13} der Fall sein; der $\sphericalangle(s''', a_{13})$ ist der verlangte Winkel α'. Π_3 schneidet in Π_1 und E selbst einen Neigungswinkel ein, den andern ist sie parallel. (Vergl. Nr. 86).

d) Ist P noch ein beliebiger Punkt, so giebt das Loth aus P_3 auf s''' noch *die (wahre) Entfernung des Punktes P von* E, denn E ist senkrecht auf Π_3, das Loth aus P auf E also parallel zu Π_3 (Nr. 57).

Zur Uebung sind die Aufgaben b) und c) für den Fall zu lösen, wenn die Neigungswinkel β'' und α'' gegen Π_2 gesucht sind; Π_3 ist dann senkrecht auf Π_2 zu stellen und nach Π_2 umzulegen.

145. Für andere Zwecke z. B. besonders um eine Gerade g zur Normalität, eine Ebene E zum Parallelismus zu einer Projectionsebene zu bringen, genügt nicht blos eine dritte, sondern es muss *noch eine vierte Projectionsebene* Π_4 eingeführt werden, *welche senkrecht* Π_3 *steht* und an Stelle von Π_1 tritt; denn damit Π_3 normal zu g, bez. parallel zu E und ausserdem senkrecht noch zu Π_1 wäre, müsste g schon parallel, E senkrecht zu Π_1 sein. Hat man Π_3 parallel g, bez. senkrecht auf E (also auf s') gestellt, so kann man nun Π_4 so senkrecht auf Π_3 stellen, dass sie normal zu g, bez. parallel zu E ist.

Hinsichtlich der Ebenen Π_4, Π_3, Π_1 gilt nun ganz dasselbe, was vorher für Π_3, Π_1, Π_2 galt; besonders wichtig für die Construction ist, dass wenn P_4 nun die vierte Projection des Punktes $P = (P_1, P_2, P_3)$ ist, P_4P_3 *auf* $a_{34} = \Pi_3\Pi_4$ *(in P_{34}) senkrecht steht, dass* $P_4P_{34} = P_1P_{13} = PP_3$, *und dass die vierten Projectionen zweier Punkte auf derselben oder verschiedenen Seiten von* a_{34} *liegen, je nachdem sich die ersten auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von* a_{13} *befinden.* Die zuerst construirte vierte Projection eines Punktes kann man beliebig legen: dann ist aber das Entsprechen der Seiten von a_{13} und a_{34} bestimmt.

An der Figur wird nichts geändert, ob man sich Π_3 um a_{13} in Π_1 und dann Π_4 um a_{34} in Π_3 umgelegt denkt, oder Π_1 und Π_4 um a_{13} und a_{34} in Π_3. Bei letzterem Umlegen erhält man die Axe $\Pi_1\Pi_4$ mit Π_1 umgelegt nach a_{14} senkrecht auf a_{13} in dem Punkte $O' = \Pi_1\Pi_3\Pi_4 = a_{13}a_{34}$ und mit Π_4 nach $a_{14}{}^*$ umgelegt senkrecht auf a_{34} ebenfalls in O'; wobei dann die Punkte auf a_{14} und $a_{14}{}^*$, welche gleichweit von O' auf entsprechenden Seiten von a_{13} und a_{34} liegen, sich entsprechen.

Ueber die vier Spurlinien s' s'' s''' s^{IV} einer Ebene gilt also, dass s', s'' sich auf a_{12}, s', s''' auf a_{13}, s''', s^{IV} auf a_{34} treffen, während a_{23} und a_{23}^* bez. von s'' und s''', a_{34} und a_{34}^* bez. von s' und s^{IV} in entsprechenden Punkten getroffen werden.

146. a) *Um* also *die Ebene* E *einer Figur parallel zu einer Projectionsebene zu machen,* so dass die Figur sich congruent projicirt, legt man zuerst Π_3 (und deshalb a_{13}) senkrecht zu s', also zu Π_1 und E; es wird nun s''' construirt und die dritte Projection der Figur. Darauf wird Π_4 eingeführt, welche senkrecht Π_3 und parallel (oder identisch) mit E ist, also a_{34} parallel (oder identisch) mit s'''; die vierte Projection der Figur giebt die wahre Gestalt.

b) *Den kürzesten Abstand und den Neigungswinkel zweier windschiefen Geraden g und l* findet man auch mit Hilfe der Einführung von Π_3 und Π_4 in folgender Weise (Fig. 41). Man construirt zunächst eine Ebene E, welche den beiden Geraden g und l parallel ist (Nr. 113); sie ist durch g und die zu l parallele Gerade m gelegt: h' ist eine erste Hauptlinie dieser Ebene; also $h_1' \parallel s'$. Π_3 ist auf h_1', also auf E und Π_1, Π_4 dann wieder senkrecht auf Π_3 und parallel mit E zu stellen wie in a). In Bezug auf Π_4 und Π_3 gilt nun ganz dasselbe, wie über Π und Π_2 in Nr. 58; g_3 und l_3 werden also parallel; a_{34} ist mit ihnen ebenfalls parallel zu führen. Der Winkel (g_4, l_4) giebt den gesuchten Winkel; der Punkt $g_4\, l_4$ ist die vierte Projection des beide Geraden schneidenden gemeinsamen Lothes, p_3 auf g_3, l_3 und a_{34} senkrecht (Nr. 72) giebt, soweit es zwischen g_3 und l_3 liegt, den kürzesten Abstand. Die Lage des Lothes erhält man, wenn man die dritten Projectionen seiner Fusspunkte nach Π_1 und Π_2 zurückführt.

c) Wir wollen *den Neigungswinkel zweier Ebenen* E *und* Φ durch Π_3 und Π_4 erhalten (Fig. 42). Man construire $k = \mathsf{E}\Phi$, stelle Π_3 senkrecht auf Π_1 und parallel k (also $a_{13} \parallel k_1$), wodurch $s_{\mathsf{E}}''' \parallel s_{\Phi}''' \parallel k_3$ werden muss, und dann Π_4 senkrecht Π_3 und k, also a_{34} normal zu k_3; der $\sphericalangle (s_{\mathsf{E}}^{IV}, s_{\Phi}^{IV})$ ist dann der verlangte (Nr. 57).

d) Unter dem *Normalschnitt eines Prismas* versteht man die Schnittfigur desselben mit einer zu den Seitenkanten normalen Ebene. Führt man nun bei einem durch seine Projectionen in Π_1 und Π_2 dargestellten Prisma allmählig Π_3 parallel zu den Seitenkanten und Π_4 senkrecht zu ihnen ein, so sind die vierten Projectionen der Seiten-Kanten und -Flächen Punkte und gerade Linien und bilden den Normalschnitt. Als schneidende Ebene kann Π_4 selbst betrachtet werden; dann fällt der Normalschnitt mit seiner vierten Projection zusammen (andernfalls sind beide congruent). In Π_3 stellen sich die auf den Seiten-Kanten

befindlichen Strecken, z. B. je die von der Ecke des Normalschnitts bis zu der der Grund- oder Deckfigur, in wahrer Länge dar.

c. Die neue Projectionsebene ist einer der früheren parallel.

147. Ein besonderer Fall der Lage der neuen Projectionsebene muss noch erwähnt werden, wenn sie nämlich einer der gegebenen parallel ist, z. B. zu Π_1, in welchem Falle wir sie $^*\Pi_1$ nennen wollen. Man erhält dann *eine neue Projectionsaxe* $^*a$ parallel der alten. Die zweiten Projectionen bleiben ganz ungeändert; die zweiten Ordinaten aber werden alle um die gleiche Strecke (algebraisch) verändert. Die neuen ersten Projectionen der Punkte müssen von $^*a$ dieselbe Entfernung haben, wie die alten von a; die neue erste Projection einer Figur ist offenbar der alten vollständig congruent; denn beide sind Schnitte eines und desselben Prismas (oder Cylinders) durch die parallelen Ebenen Π_1 und $^*\Pi_1$. Diese Verschiebung der ersten Projectionsfigur ist aber umständlich und wird dadurch vermieden, dass *man die Projectionsaxe, insofern sie zur ersten Projectionsebene gehört, an der alten Stelle* a *lässt und* $^*a$ *nur als die Lage der Projectionsaxe in der zweiten Projectionsebene auffasst.* Es bleibt dann jede erste Projection ebenfalls an ihrer Stelle.

Die senkrecht über einander liegenden Punkte von a und $^*a$ entsprechen sich und z. B. die Spurlinien $^*s'$ und s'' einer Ebene treffen a und $^*a$ in entsprechenden Punkten. Aufriss und Grundriss befinden sich übrigens in technischen Zeichnungen oft auf verschiedenen Blättern; jedes enthält dann die Axe und ein Paar entsprechender Punkte der beiden Axen müssen markirt sein; so dass die übrigen entsprechenden dann leicht zu ermitteln sind.

148. *Die Schnittlinie zweier durch ihre Spurlinien* s_E', s_E''; s_Φ', s_Φ'' *gegebenen Ebenen* E *und* Φ soll mit Hilfe einer parallel verschobenen ersten Projectionsebene ermittelt werden, weil der Schnittpunkt der ersten Spurlinien unbequem liegt (Fig. 43). Die Axe $^*a$ in Π_2 trifft die beiden zweiten Spurlinien in den Punkten, durch deren entsprechende auf a die neuen ersten Spurlinien $^*s_E'$, $^*s_\Phi'$ offenbar parallel zu den alten gehen. Ihr Schnittpunkt $^*U$ ist ein Punkt der gesuchten Linie; er fällt mit seiner Projection in $^*\Pi_1$ zusammen, die zweite Projection liegt auf der Axe $^*a = {}^*\Pi_1\Pi_2$. Wir haben so einen Punkt $^*U$ von k an Stelle des unbequemen Schnittpunktes S der beiden ersten Spurlinien in Π_1.

Es leuchtet bald ein, dass man zu derselben Figur gelangt, auch

ohne eine neue Projectionsebene $^*\Pi_1$; $^*s_E'$, $^*a$ bez. $^*s_\Phi'$, $^*a$ sind die Projectionen der ersten Hauptlinien, welche in die Ebenen E und Φ von der zu Π_1 parallelen Ebene $^*\Pi_1$ eingeschnitten werden; $^*\Pi_1$ ist eine solche Hilfsebene, wie sie in Nr. 92 angewandt wurde.

Es kommt überhaupt jede Ersetzung einer Spurlinie einer Ebene durch eine gleichnamige Hauptlinie auf eine Parallelverschiebung der entsprechenden Projectionsebene hinaus und umgekehrt.

Sechster Abschnitt.

Die dreiflächige (dreikantige) Ecke.

149*). Drei Ebenen (welche nicht durch dieselbe Gerade gehen) treffen sich in einem Punkt S, durch den die drei Schnittlinien von je zweien gehen (Dreiflach, Dreikant, Trieder). Ist S nicht unendlich fern, so wird jede dieser Schnittlinien durch ihn in zwei Halbstrahlen getheilt; diese 6 Halbstrahlen lassen sich achtmal zu je dreien combiniren, und jede solche Combination liefert *eine dreiflächige* oder *dreikantige Ecke,* d. i. denjenigen Theil des Raums, der durch die von den Halbstrahlen auf den Ebenen gebildeten Winkel begrenzt wird. Die drei Halbstrahlen heissen die Kanten der Ecke; sie sollen mit a, b, c bezeichnet werden und ebenso die im Innern der Ecke gelegenen Flächenwinkel, welche sie zu Scheitelkanten haben und die man gewöhnlich Winkel der Ecke nennt. Die Winkel zwischen den Kanten sollen α, β, γ genannt werden (und ebenso die Ebenen, in denen sie liegen) und zwar so, dass a und α, b und β, c und γ sich gegenüberliegen. Man pflegt diese Winkel Seiten der Ecke zu nennen; doch weil das Wort Seite schon so vielerlei Bedeutungen hat, wollen wir lieber die Worte Kantenwinkel und Flächenwinkel beibehalten.

Kennt man von diesen 6 Stücken drei, so sind bekanntlich die übrigen dadurch bestimmt. Es ergeben sich in Folge dessen 6 Aufgaben, von denen aber in Folge der Eigenschaft der sogenannten Polar-Ecke je drei auf die drei übrigen zurückzuführen sind.

Fällt man nämlich von einem Punkte S' innerhalb der Ecke S die Lothe auf die Ebenen α β γ, so bilden diejenigen Halbstrahlen a' b' c' dieser Lothe, welche die Fusspunkte enthalten, eine neue Ecke: *die*

---

*) Das in Nr. 149 Gesagte ist wohl im Allgemeinen aus der Stereometrie bekannt und wird hier nur der Vollständigkeit halber besprochen; eine frühere Erwähnung der Ecke (Nr. 32) ist also insofern nicht ungerechtfertigt.

Polar- oder Supplementar-Ecke der gegebenen S. Da $a' \perp \alpha$, $b' \perp \beta$, so ist der der Ecke S' angehörige Kantenwinkel $(a', b') = \gamma'$ das Supplement des Flächenwinkels $(\alpha, \beta) = c$, welcher zu S gehört (Nr. 30); ebenso ist $\beta' + b = 180^0$ und $\alpha' + a = 180^0$. Ferner, da $a' \perp \alpha$, $b' \perp \beta$, so ist die Ebene $a'b' = \gamma'$ senkrecht auf den Ebenen α und β, mithin auf der Kante $\alpha\beta = c$; es stehen also auch die Kanten der gegebenen Ecke S auf den Ebenen der neuen normal, also ist S auch die Polarecke von S', und $a' + \alpha = 180^0$, $b' + \beta = 180^0$, $c' + \gamma = 180^0$. Mithin lassen sich die drei Aufgaben:

Gegeben:	a, b, c;	gesucht:	α, β, γ;
„	a, b, γ;	„	α, β, c;
„	a, b, α;	„	c, β, γ;

auf *die drei Aufgaben:*

Gegeben:	α, β, γ;	*gesucht:*	a, b, c;
„	α, β, c;	„	a, b, γ;
„	α, β, a;	„	γ, b, c

zurückführen.

150. Um die erste von diesen letzteren Aufgaben: *gegeben* α, β, γ; *gesucht* a, b, c, zu lösen (Fig. 44), denken wir uns einen der drei gegebenen Kantenwinkel, z. B. β in die Projectionsebene Π_1 gelegt (wir werden mit einer Projectionsebene auskommen), und die beiden Nachbarwinkel α und γ bez. um c und a in Π_1 umgelegt und zwar nach aussen, wobei die Ecke längs der Kante b aufgeschnitten wird. Wohin b in beiden Fällen zu liegen kommt, ist bekannt, weil α und γ gegeben; nennen wir diese Umlegungen von b b_0' und b_0''; ein Punkt P auf b wird also nach P_0', bez. P_0'' fallen, welche gleiche und offenbar beliebig anzunehmende Entfernungen von S haben. Wir erhalten die Projection P_1 von P als den Schnittpunkt des von P_0' auf c und des von P_0'' auf a gefällten Lothes, weil die Verbindungslinie der Umlegung und der Projection stets normal zu der Geraden ist, um welche umgelegt wird. Es seien P_c und P_a die Fusspunkte dieser Lothe, so sind $PP_c = P_0'P_c$ und $PP_a = P_0''P_a$ die Längen der durch P gehenden Falllinien in α bez. γ; P_1P_c, P_1P_a deren Projectionen; construirt man also aus $P_0'P_c$ als Hypotenuse und P_1P_c als einer Kathete das rechtwinklige Dreieck $P_1P_cP_0'''$, so ist $\measuredangle P_1P_cP_0'''$ der Flächenwinkel $c = (\alpha, \beta)$, oder sein Supplement, je nachdem P_1 auf der andern Seite von c liegt als P_0', oder auf derselben; P_0''' ist eine neue Umlegung von P mit der Ebene des Neigungswinkels c. Wird ebenso aus $P_0''P_a$ als Hypotenuse und aus P_1P_a als einer Kathete das rechtwinklige Dreieck P_1 P_a P_0^{IV} construirt, so ist $\measuredangle P_1P_aP_0^{IV}$ der Winkel $a = (\beta, \gamma)$ bez. dessen Supplement. P_1P_0''' und $P_1P_0^{IV}$

geben beide den Abstand des Punktes P von Π_1, also müssen sie gleich sein.

Errichtet man in P_0' auf b_0' und in P_0'' auf b_0'' die Lothe bis sie c, bez. a in S_c und S_a treffen, so sind diese Linien die mit α, γ umgelegten Schenkel des Neigungswinkels $b = (\alpha, \gamma)$, dessen Scheitel in P liegt; $S_c\, S_a$ ist die Spurlinie der Ebene desselben. Da wir die Projection P_1 von P und seinen Abstand von Π_1 nennen, so können wir leicht seine Umlegung P_0^V mit dieser Ebene construiren: es ist dann $\sphericalangle\, S_c\, P_0^V\, S_a$ gleich dem gesuchten $\sphericalangle\, b$; als Controlle dient: $S_c P_0^V = P_c P_0'$, $S_a P_0^V = S_a P_0''$.

Je nachdem man sich nun P auf der einen oder andern Seite von $\Pi_1 \equiv \beta$ vorstellt, erhält man zwei Ecken, die in allen sechs Stücken übereinstimmen, aber nicht zum Decken gebracht werden können, sondern nur symmetrisch sind.

Damit die Aufgabe möglich sei, ist natürlich nothwendig, dass sowohl $P_1 P_c < P_c P_0'$, als auch $P_1 P_a < P_a P_0''$.

Um also die Möglichkeit der Aufgabe zu untersuchen, lassen wir, indem β und γ festbleiben, wobei $\beta > \gamma$ angenommen wird, α sich verändern: es sei $\alpha = \beta - \gamma$, so theilt die Linie SP_1 den Winkel β gerade in zwei mit α und γ gleiche Theile: es ist dann $P_1 P_c = P_c P_0'$ und $P_1 P_a = P_a P_0''$ und die Winkel a und c sind gleich Null. Ist also $\alpha < \beta - \gamma$, (oder $\beta > \alpha + \gamma$), so sind $P_1 P_c$ und $P_1 P_a$ bez. grösser als $P_c P_0'$ und $P_a P_0''$. Wenn nun $\alpha > \beta - \gamma$ wird, so ist zunächst leicht zu sehen, dass P_1 sich auf P_1, P_0'' auf P_0'' zu bewegt, also $P_1 P_a < P_0'' P_a$ ist; P_0' bewegt sich auf einem Kreise um S und ist ebenfalls stets weiter von a entfernt, als P_1, was man bald einsieht, wenn man die symmetrische Linie zu $P_1 P_a P_0''$ in Bezug auf c*) zeichnet. Hat aber α den Werth $\beta + \gamma$ erreicht, so fällt P_0' in den Symmetriepunkt von P_0'' und P_1 in P_0'' selbst, sodass wieder sowohl $P_1 P_a = P_0'' P_a$ als auch $P_1 P_c = P_0' P_c$ ist.

Die Aufgabe ist demnach nur möglich, wenn jeder der gegebenen Winkel α, β, γ zwischen der Summe und der Differenz der beiden andern liegt.

151. Die zweite Aufgabe: *wenn zwei Kantenwinkel und der eingeschlossene Flächenwinkel gegeben sind, die drei andern Stücke zu construiren*, darf übergangen werden, da ihre Lösung leicht aus der ersten zu entnehmen ist.

Ebenso lässt sich auch die Lösung *der umgekehrten Aufgabe*, ohne

---

*) d. i. die Linie, von welcher jeder Punkt einen derartigen entsprechenden auf $P_1 P_a P_0''$ hat, dass c auf der Verbindungslinie beider in der Mitte senkrecht steht.

dass man sich der Polarecke bedient, leicht aus der ersten ableiten; wenn β der gegebene Kantenwinkel, a und c die gegebenen Flächenwinkel sind, so wird man, indem man zu den Kanten a und c Parallele zieht, deren Abstände sich wie $\operatorname{cotg} a : \operatorname{cotg} c$ verhalten (und zwar innerhalb oder ausserhalb des Winkels β, je nachdem die betreffende Cotangente positiv oder negativ, der Winkel spitz oder stumpf ist), in deren Schnittpunkt die (erste) Projection eines Punktes der Kante b erhalten; aus derselben ist dann leicht der Abstand dieses Punktes von $\Pi_1 \equiv \beta$ und die Länge der aus ihm in den Ebenen γ und α gezogenen Falllinien zu ermitteln, u. s. f.

152. Um die dritte Aufgabe: *gegeben* α, β, a; *gesucht* γ, c, b, zu lösen (Fig. 45); ist es gut, nachdem wieder β in Π_1 selbst gelegt und α um c in Π_1 umgelegt ist, so dass b nach b_0' fällt, eine zweite Projectionsebene Π_2 einzuführen, welche auf der Kante c normal ist; sie treffe a, c, b_0' bezüglich in Y, X, Z_0'; das Loth aus X auf a, die erste Spurlinie der Ebene γ, die mit $\Pi_1 \equiv \beta$ den Winkel a bilden soll, sei XQ; macht man nun $XW = XQ \operatorname{tg} a$ senkrecht zur Projectionsaxe und zwar, wenn a oberhalb Π_1 liegen soll, oberhalb oder unterhalb, je nachdem a spitz oder stumpf, $\operatorname{tg} a$ positiv oder negativ ist, so ist W ein Punkt der zweiten Spurlinie der gesuchten Ebene γ, diese Spurlinie also WY; auf ihr muss der Punkt Z liegen, der beim Umlegen der Ebene α um c, einen in Π_2 gelegenen Kreisbogen beschreibend, nach Z_0' zu liegen kam; also ist $Z \equiv Z_2$ leicht zu finden, Z_1 liegt auf der Axe. Da die Ebene α normal Π_2 ist, so ist $\sphericalangle YXZ$ gleich dem gesuchten Winkel c, der Kantenwinkel γ ergiebt sich durch Umlegung des Punktes Z mit der Ebene γ um a; u. s. f.

Ist $\beta > \alpha$, so ist $XY > XZ_0'$; also trifft der um X mit XZ_0' geschlagene Kreis, durch den der Punkt Z erhalten wird, die YW auf der Seite von Y, wo a liegt, zweimal, oder einmal, oder gar nicht; mithin hat die Aufgabe in diesem Falle zwei oder eine oder keine Lösung.

Wenn hingegen $\beta < \alpha$, also $XY < XZ_0'$ ist; so trifft jener Kreis die YW stets einmal auf der einen und einmal auf der andern Seite von Y; nur der Punkt, der auf derselben Seite von Π_1 liegt wie der Winkel a, liefert eine Lösung. Mithin hat in diesem Falle die Aufgabe stets eine und nur eine Lösung.

153. *Man kann dieselben Aufgaben auch behandeln, indem man gleich eine Polarecke einführt* und zwar auf folgende Weise: Man durchschneide (Fig. 46) die Ecke S mit einer ihr concentrischen Kugel, sodass sich ein sphärisches Dreieck ABC ergiebt, wo A auf a u. s. f. liegt; die Berührungsebenen α', β', γ' der Kugel in diesen Punkten A, B, C bil-

den die Polarecke S', weil sie bezüglich auf den Radien OA, OB, OC, den Kanten von S, normal sind. Die Punkte A', B', C', in denen die Kanten a', b', c' der neuen Ecke bez. auf den Ebenen α, β, γ der alten senkrecht stehen, sind die Schnittpunkte der Tangenten je in den Endpunkten des Bogens, welcher in der betreffenden Ebene von S liegt. In der Ebene α befindet sich das Viereck $SBA'C$ mit rechten Winkeln bei B und C; in der Ebene α' das Viereck $S'B'AC'$ mit rechten Winkeln bei B' und C'; der Winkel bei A ist der Flächenwinkel $a=(\beta, \gamma)$ der Ecke S; ähnlich in den andern Fällen.

Auf der Schnittlinie der Ebenen γ und γ', welche bez. die Vierecke $SAC'B$; $S'A'CB'$ enthalten, treffen sich die Kanten SA, SB bez. mit den Tangenten CB', CA' in D, E; denn z. B. SA und CB' liegen beide in der Ebene β, schneiden sich also, andererseits liegt SA in γ, CB' in γ'; mithin müssen sie sich auf der Schnittlinie $\gamma\gamma'$ schneiden. Ebenso schneiden sich die Kanten $S'A'$ und $S'B'$ bez. mit den Tangenten BC' und AC' in G, F auf $\gamma\gamma'$.

Das Dreieck $AB'F$ ist bei B' rechtwinklig nnd enthält bei A den Flächenwinkel a oder dessen Supplement, je nachdem F und C' auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von A liegen. Ebenso enthält das bei A' rechtwinklige Dreieck $BA'G$ bei B den Winkel b oder dessen Supplement, je nachdem C' und G auf derselben Seite von B liegen oder nicht. In dem Dreiecke DEC liegt bei C der Flächenwinkel c.

154. Dies genügt, um die Construction der ersten beiden der obigen Aufgaben auszuführen.

Es werden also, wenn es sich um *die erste Aufgabe* handelt (Fig. 47), wie oben die 3 gegebenen Kantenwinkel $C_0SA=\beta$, $ASB=\gamma$, $BSC_0=\alpha$ hingelegt, so dass die äussern in die Ebene des mittleren umgelegt sind: die Umlegung ist dabei jedesmal nach aussen, also um den Nebenwinkel des betreffenden Flächenwinkels erfolgt; C_0, A, B, C_0 liegen hier natürlich auf einem Kreise. Die Tangenten desselben in diesen Punkten bringen wir zum Schnitt und erhalten dadurch B_0', C', A_0', wovon die beiden äusseren die umgelegten Punkte B', A' sind*). Die Punkte D und E sind an ihrer Stelle geblieben und in den Schnitten von SA, C_0B_0' und von SB, C_0A_0' leicht zu finden und damit die Gerade DE, die Spurlinie von γ' in γ, durch AC' und BC' dann auf ihr die Punkte F, G. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke mit der Hypotenuse AF und der einen Kathete AB_0' erhält man je nach der Lage von

*) Um die Zeichen nicht zu sehr zu häufen, sind hier die verschiedenen Umlegungen nicht unterschieden.

F in dem von beiden eingeschlossenen Winkel den Flächenwinkel a oder dessen Supplement. Aehnlich erhält man den Winkel b; und bildet man aus DE, EC_0 und DC_0 das Dreieck, so schliessen die beiden letzten Seiten den Winkel c ein.

Die *zweite Aufgabe* wird in ähnlicher Weise gelöst; man findet von der Linie $\gamma\gamma'$, wenn β, γ, a gegeben sind, zuerst D und F.

155. Für die Lösung der *dritten Aufgabe* fügen wir, wenn β, γ, b gegeben sind, in der Figur 46 noch die Ebene λ durch $D = (SA, CB')$ hinzu, welche auf SB senkrecht steht, also zu der Tangentialebene β' in B parallel ist. Sind M, N ihre Schnittpunkte mit SB, CA', so ist $\sphericalangle DMN$ der Winkel b oder dessen Supplement, je nachdem N zwischen C und E fällt oder jenseits E. DN liegt in $\gamma' = A'CB'$ und ist also parallel zu $S'A'$, dem Schnitte von β' mit γ'; ebenso sind MN und BA' parallel als Schnittlinien der parallelen Ebenen λ und β' mit α, folglich $\sphericalangle DNM = S'A'B = 90^0$.

Man wird also (Fig. 48) die gegebenen Kantenwinkel β, γ an einander legen, als C_0SA und ASB, wobei wieder C_0, A, B auf einem Kreise um S liegen und C_0SA als umgelegt betrachtet wird, die Kante SA und die Tangente in C_0 in D zum Schnitt bringen, das Loth DM auf SB fällen, über DM als Hypotenuse mit dem Winkel b, bez. dessen Supplement, das rechtwinklige Dreieck DMN_0 construiren, MN_0 auf der Verlängerung von DM über M oder nach D zu auftragen (bis N_0'), je nachdem b spitz oder stumpf ist, und von N_0' an den Kreis C_0BA die Tangenten führen. Nach denjenigen Berührungspunkten dieser Tangenten, die, wenn b spitz ist, auf derselben Seite von SB wie N_0', oder wenn b stumpf ist, auf der andern Seite liegen, zieht man von S die Radien; jeder liefert mit SB einen Winkel α; so dass nun die Aufgabe auf die erste reducirt ist und wie oben zwei, oder eine, oder keine Lösung hat. Auf die genauere Discussion dieser verschiedenen Möglichkeiten wollen wir hier nicht eingehen*).

Siebenter Abschnitt.

Die Polyeder.

a) Darstellung der Polyeder.

156. Es kann natürlich nicht unser Zweck sein, alle möglichen Fälle der Darstellung eines Polyeders, die von seiner Gestalt und Lage

*) Diese interessante Lösung der Ecken-Aufgaben verdankt man neuerdings den Herren Fiedler und Hemming.

im Raume herrühren können, zu erschöpfen. Wir begnügen uns deshalb mit der Auseinandersetzung einiger Fälle.

Es möge zuerst ein Prisma construirt werden; von demselben ist die Grundfigur ihrer Gestalt und Lage nach gegeben; d. h. ihre Ebene E *und ihre Umlegung* $A_0B_0C_0D_0E_0$ mit E *in* Π_1. *Ferner sind noch die Länge der durch* A *gehenden Seitenkante* AF *und die beiden Winkel* β *und* γ, *welche sie mit den Grundkanten* AE *und* AB *bildet, gegeben* (Fig. 49). Der Winkel der Grundfigur bei A sei α. An die beiden Schenkel A_0B_0 und A_0E_0 lege man zu beiden Seiten β und γ an, trage auf ihren äusseren Schenkeln die Länge der Seitenkante AF auf als A_0F_0' und A_0F_0'', so dass $F_0'A_0E_0$ und $F_0''A_0B_0$ die zunächst mit ihren Ebenen in E und dann mit E in Π_1 umgelegten Winkel FAE und FAB sind. Wie in Nr. 150 aus P_0' und P_0'' die Projection P_1 und die Höhe PP_1 des Punktes P über Π_1 gefunden, so finden wir hier ebenfalls den Fusspunkt L_0 des aus F auf E gefällten Lothes (zunächst mit E umgelegt) und die Länge dieses Lothes, die Höhe des Prismas, VZ $(= \sqrt{F_0''V^2 - L_0V^2})$. Man hat nun nichts anderes zu thun, als die Figur $ABCDE$ und den Punkt L aufzuheben (Nr. 109 oder, wie in der Figur, nach Nr. 112); dann auf E in L das Loth zu errichten und auf ihm die eben gefundene Höhe aufzutragen (etwa nach Nr. 131); wodurch der Punkt F in seinen Projectionen erhalten wird; als Controlle dient, dass $F_1L_1 = FL \,.\, \sin\alpha'$ ist, wenn α' der Neigungswinkel (E, Π_1), also das Complement des Neigungswinkels der Prismenhöhe FL gegen Π_1 ist. Man zieht nun durch F die Gerade FG gleich und parallel mit AB (d. i. $F_1G_1 \# A_1B_1$, $F_2G_2 \# A_2B_2$) und so fort, oder man zieht durch die andern Ecken der Grundfigur Kanten parallel und gleich AF.

Es erhellt, dass auf dem nämlichen Wege auch dieselbe Aufgabe für eine Pyramide zu lösen ist; es vereinfacht sich die Lösung wesentlich, wenn für das Prisma statt der Neigungen β und γ gleich von vornherein die Richtung der Seitenkanten gegeben ist, oder bei der Pyramide die Spitze selbst.

Die Aufgaben, einen Würfel oder ein (reguläres) Tetraeder zu zeichnen, deren Grundfläche der Lage nach gegeben ist, sind damit auch erledigt.

157. Die Körper werden gewöhnlich materiell vorgestellt; *es werden also die Ecken, Kanten und Flächen zum Theil unsichtbar sein* und zwar im Allgemeinen in der einen Projectionsebene anders als in der andern (Nr. 104). Für *convexe Polyeder* (auf deren Betrachtung wir uns beschränken), welche nur ausspringende Flächenwinkel haben und von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten getroffen werden, gilt offenbar Folgendes: In einer sichtbaren Kante schneiden sich entweder

zwei sichtbare oder eine sichtbare und eine unsichtbare Fläche. Im zweiten Falle gehört die Kante zu den *Umrisskanten* (oder Randkanten) des Polyeders, die man also, je nachdem es sich um die erste oder zweite Projection handelt, erste oder zweite Umrisskanten nennt. Die projicirende Ebene einer Umrisskante streift (berührt) das Polyeder, während die einer andern Kante es durchschneidet. *Die Umrisskanten*, die mithin die Projectionsfigur einschliessen, *sind demnach jederzeit sichtbar*, z. B. in der Figur 49 in der ersten Projection die Kanten *EA*, *AB*, *BG*, *GH*, *HI*, *IK*, *KE*, in der zweiten die Kanten *DE*, *EA*, *AF*, *FG*, *GH*, *HJ*, *JD*. Die übrigen Kanten (deren Projectionen in die Figur hineinfallen) sind entweder sichtbar oder unsichtbar*). Wir wollen z. B. die Kante *DE* in Fig. 49 auf ihre Sichtbarkeit oder Unsichtbarkeit in der ersten Projectionsebene untersuchen. Ihre erste Projection durchschneidet sich mit der von *FK*; lothen wir diesen Schnittpunkt auf die beiden zweiten Projectionen der Kanten; ergeben sich verschiedene Punkte, so dass es sich nur um einen scheinbaren Schnitt handelt, so ist diejenige Kante, welche den höheren Punkt enthält, hier also *KF*, die sichtbare, die andere die unsichtbare.

Dies kann man auch so aussprechen: *Zwei sichtbare oder zwei unsichtbare Kanten können sich nicht scheinbar schneiden.*

Die Sichtbarkeit in der zweiten Projection wird in ähnlicher Weise an dem weiteren Vorliegen in der ersten Projectionsebene erkannt.

Man wird nicht für alle Kanten dieselbe umständliche Untersuchung zu machen brauchen; denn hat man es für einige Kanten auf diese exacte Art festgestellt, so lässt sich auf andere leicht schliessen; wenn nämlich eine Fläche sichtbar ist, so sind alle ihre Kanten und Ecken sichtbar; von einer unsichtbaren Fläche hingegen sind alle Kanten und Ecken (s. die Anm.) unsichtbar; ist demnach eine Kante schon als sichtbar oder unsichtbar erkannt, so sind alle Kanten, die mit ihr zu derselben Fläche gehören, sichtbar oder unsichtbar. Jede Kante, die durch eine sichtbare (aber nicht auf dem Umriss gelegene) oder unsichtbare Ecke geht, ist selbst sichtbar, bez. unsichtbar.

Von zwei parallelen Flächen eines convexen Polyeders ist eine sichtbar, die andere unsichtbar.

158. Um *ein Octaeder* darzustellen, wird man am besten in eine Ebene ein Quadrat legen und im Diagonalschnittpunkt senkrecht zu dieser Ebene nach beiden Seiten die halbe Diagonale errichten.

---

*) Im Folgenden wird nur von diesen nach Ausschluss der Umrisskanten übrig bleibenden Kanten geredet; unsichtbare Kanten werden *punktirt*; in den Tafeln sind sie meistens gestrichelt, jedoch kürzer als die Hilfslinien.

Die Projection eines Octaeders, das mit einer Fläche z. B. in Π_1 gelegt ist, ist in Π_2 wenig anschaulich; man wird es, wenn man es so construirt hat, dann durch Drehung um eine zu Π_2 normale Axe, nach welcher die beiden Flächen, welche sich in Π_2 geradlinig projiciren, dies noch thun, aber ihren Parallelismus mit Π_1 aufgegeben haben, und eine darauf folgende Drehung um eine auf Π_1 normale Axe, welche nun auch die geradlinige Projection aufhebt, in anschaulichere Form bringen.

159. Wir wenden uns zur Darstellung der beiden schwierigeren unter den regulären Polyedern (indem wir uns nämlich blos mit den fünf convexen, seit Alters bekannten beschäftigen wollen), zunächst zu der des *Dodecaeders* (Fig. 50, Taf. VIII).

Wir denken uns dasselbe mit einer Seitenfläche $ABCDE$ auf die Π_1 gestellt. Die 20 Ecken sind dann in Π_1 und drei mit Π_1 parallele Ebenen vertheilt, in Π_1 selbst die 5 Ecken der Grundfigur, in der nächst höheren Ebene Δ 5 Ecken, welche in den an die Grundfläche anstossenden Fünfecken den Ecken in Π_1 benachbart sind und zu je zwei dieser Fünfecke gehören; in der dritten Ebene Φ befinden sich die höchsten Ecken dieser 5 Fünfecke, deren jede auch zu zwei der an die Deckfläche stossenden Fünfecke gehört, während die niedrigsten Ecken dieser Fünfecke die in Δ befindlichen sind; die vierte Ebene Ψ enthält die Deckfigur. Die Distanzen $\Phi\Psi$ und $\Delta\Pi_1$ sind offenbar gleich. Es giebt ersichtlich 6 solche Vertheilungsweisen. Zur Construction des regulären Fünfecks $ABCDE$ aus seiner Seite dient, wenn s_5 die Längenzahl der Seite und d_5 die jeder der 5 (gleichen) Diagonalen ist, die Formel:

$$d_5 = \frac{s_5}{2}(\sqrt{5}+1);^{*)}$$

daher ist die Diagonale gleich der Summe der halben Seite und der Hypotenuse, zu der als Katheten die ganze und die halbe Seite gehören. Ist AB also die Seite, so erhält man aus den Kreisen, die um A und B mit der Diagonale geschlagen sind, die Gegenecke D und dann mit

*) Sind s_u, d_u die Seite und die eine Ecke überspringende Diagonale eines regelmässigen u-Ecks, s_{2u} die Seite des demselben Kreise (vom Radius r) eingeschriebenen regulären $2u$-Ecks, so ist bekanntlich:

$$s_u = \frac{s_{2u}}{r}\sqrt{4r^2 - s_{2u}^2}, \quad d_u = \frac{s_u}{r}\sqrt{4r^2 - s_u^2};$$

da nun $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, so ergiebt sich: $s_5^2 = \frac{r^2}{2}(5-\sqrt{5})$, $d_5^2 = \frac{r^2}{2}(5+\sqrt{5})$, mithin $d_5 = \frac{s_5}{2}(\sqrt{5}+1)$.

Hilfe von Kreisen mit der Seite als Radien die beiden anderen Ecken C und E. Es ist genau die Gleichheit der fünf Diagonalen, sowie der aus jeder Ecke auf die Gegenseite gefällten Lothe (der Höhen des Fünfecks), die Halbirung der Seiten durch die letzteren und die Convergenz der Höhen im Mittelpunkte Z des Fünfecks zu controlliren.

Man vermeide, dass eine der fünf Höhen ganz oder nahezu senkrecht zur Projectionsaxe sei, weil sonst in Π_2 geradlinige oder sehr schmale Projectionen von Flächen sich ergeben. $ABCDE$ kann nun auch als die Umlegung jedes der fünf anstossenden Fünfecke um seine Grundkante betrachtet werden; sei AF die dritte Kante durch A, welche zu zweien dieser Fünfecke gehört, so ist das eine Mal B die Umlegung von F, das andere Mal E; der Schnittpunkt der aus B und E bez. auf die (verlängerten) Grundkanten AE, AB gefällten Lothe ist die erste Projection F_1*) von F. Sei F' der Fusspunkt des ersten Lothes, so geben BF' als Hypotenuse und F_1F' als eine Kathete ein rechtwinkliges Dreieck, dessen andere Kathete die Höhe des Punktes F über Π_1, also auch die der zweiten Spurlinie s_Δ'' von Δ über der Axe liefert, während man in ihrem Gegenwinkel α den (spitzen) Neigungswinkel der an die Grundfläche anstossenden Flächen gegen dieselbe, also in dem Supplement den Neigungswinkel je zweier benachbarter Flächen des Dodecaeders erhält.

Der Neigungswinkel β irgend einer Kante gegen die Ebene der beiden mit ihr in eine Ecke zusammenstossenden, z. B. AF gegen Π_1, ergiebt sich durch $\cos\beta = -\frac{AF_1}{AF}$. F_1 liegt ersichtlich auf der rückwärts verlängerten Höhe des Grundfünfecks aus A. Auf dem durch F_1 gehenden Kreise um den Mittelpunkt Z liefern die vier andern Höhen die ersten Projectionen der andern in Δ gelegenen Ecken $GHJK$ des Dodecaeders, deren zweite Projectionen auf s_Δ'' liegen.

Beim Umlegen des Fünfecks $ABGLF$ kommt der höchste Punkt L, der in der Ebene Φ liegt, nach D; die erste Projection von L liegt mithin auf der Verlängerung der Höhe DD' aus D auf AB über D' und zwar ist $D'L_1 = DD' \cdot \cos\alpha$, während die zweite Ordinate von L gleich $DD' \cdot \sin\alpha$ ist; wodurch dann L_2 und s_Φ'' gegeben ist.

In Folge der Affinität zwischen der ersten Projection und der Umlegung von $ABGLF$ müssen sich sowohl F_1L_1 und ED, als auch G_1L_1 und CD auf AB treffen, und F_1G_1 und EC mit AB parallel sein; was eine empfehlenswerthe Controlle ist.

*) In der Figur sind, weil eine Verwechselung nicht möglich ist, die Projections-Indices weggelassen worden; desgleichen in mehreren späteren Figuren.



Es ist nun wiederum auf der Stelle klar, dass die ersten Projectionen der vier anderen Punkte M, N, O, P in Φ mit der von L auf einem Kreise um Z liegen und auf den Verlängerungen der anderen Höhen über die Seiten hinaus sich befinden. Aber diese beiden Kreise sind identisch: die 10 Punkte $F_1 L_1 G_1 M_1 H_1 N_1 J_1 O_1 K_1 P_1$ bilden ein reguläres Zehneck; denn die 10 Kanten des Dodecaeders, deren erste Projectionen die Seiten dieses Zehnecks sind, verbinden je einen Punkt von Δ mit einem von Φ, und da sie gleich lang ($= s_5$) sind, so haben sie auch gleiche Neigung gegen diese Ebenen und Π_1 (nämlich wenn p die Distanz von Δ und Φ ist, so ist diese Neigung γ gegeben durch: $\sin\gamma = \frac{p}{s_5}$), also haben sie auch gleiche erste Projectionen; und weil der Winkel von je zwei benachbarten immer dieselbe Grösse hat (108^0), so ist auch wegen der eben erhaltenen constanten Neigung der Schenkel gegen Π_1 seine erste Projection stets dieselbe (Nr. 33).

Es fehlen noch die Projectionen der Ecken der Deckfigur. Ersichtlich aber, wie man auf den Höhen der Grundfigur von $A \equiv A_1$ zu F_1, von $B \equiv B_1$ zu G_1 u. s. f. kommt, so kommt man umgekehrt ebenfalls auf diesen Höhen von L_1 zu Q_1, von M_1 zu R_1 u. s. f., während die zweiten Projectionen auf s_Ψ'' liegen, welches von s_Φ'' eben so weit absteht, wie s_Δ'' von der Axe.

Es ist nicht schwer einzusehen, dass die ersten Projectionen der Ecken der Grund- und der Deckfigur ebenfalls ein reguläres Zehneck bilden.

Ferner ist zu bemerken, dass nicht blos auf den Geraden durch Z je 4 erste Eckenprojectionen sich befinden, sondern auch z. B. $L_1 B_1 R_1 H_1$ in gerader Linie liegen.

Was die Sichtbarkeit in der ersten Projection anlangt, so bilden die 10 Kanten, deren erste Projectionen das grössere reguläre Zehneck bilden und welche abwechselnd von Δ nach Φ, von Φ nach Δ gehen, den Umriss; die von den Ecken dieses Umrisses nach der Grund-, bez. der Deckfigur gehenden und die diese einschliessenden sind unsichtbar, bez. sichtbar.

Von den 10 Kanten, die von Δ nach Φ gehen, mag noch folgende leicht zu erweisende Eigenschaft erwähnt werden: zertheilt man sie in zwei Gruppen: die der ungeraden und die der geraden Seiten des unebenen Zehnecks, so liegen je zwei aus verschiedenen Gruppen in derselben Ebene, je zwei aus derselben Gruppe sind windschief.

Die Sichtbarkeit in der zweiten Projectionsebene wird, wenn noch

nothwendig, am besten mit Hilfe der exacten Methode (Nr. 157) ermittelt.

160. *Das Icosaeder ist dasjenige reguläre Polyeder, welches dem Dodecaeder reciprok ist;* d. h. es hat so viele Ecken (20), bez. Flächen (12), als letzteres Flächen, bez. Ecken hat; beide haben gleich viele Kanten (30); ferner hat das Icosaeder in einer Fläche so viele Ecken und Kanten (3), als beim Dodecaeder durch eine Ecke Flächen und Kanten gehen; und beim Icosaeder gehen durch eine Ecke so viele Flächen und Kanten (5), als beim Dodecaeder Ecken und Kanten in einer Fläche liegen; d. h. beide Polyeder haben ihre Punkte und Ebenen der Zahl und Lage nach ausgetauscht.

In ähnlicher Beziehung stehen Hexaeder und Octaeder, während das Tetraeder sich selbst reciprok ist.

161. Die 12 Ecken des *Icosaeders* sind 10 mal zu je dreien auf vier parallele Ebenen vertheilt.

Wir legen eine Fläche in Π_1, so sind vier solche Ebenen Π_1 Δ, Φ, Ψ (Fig. 51, Taf. VII).

Je fünf Dreiecke kommen in eine Ecke zusammen; die Grundlinien derselben bilden ein regelmässiges Fünfeck.

Sei ABC das in Π_1 gelegte Dreieck (von dessen Höhen man keine ganz oder nahezu normal zur Axe stelle) und $BCDGE$ das zur Ecke A gehörige Fünfeck, so liegen D, E in der Ebene Δ, G in Φ. Wir denken uns dies reguläre Fünfeck in Π_1 nach $BCD_0G_0E_0$ umgelegt; das in AC an ABC anstossende Dreieck ACD werde ebenfalls umgelegt, und zwar so, dass es mit ACB zusammenfällt, also D bei dieser Umlegung mit B; die erste Projection D_1 von D befindet sich demnach einerseits auf der Höhe BB' von ABC, andererseits auf dem Lothe aus D_0 auf BC. Wir erhalten wie oben die zweite Projection von D und damit die Spurlinie s_Δ'', ferner die Neigungen α und δ der Ebenen ACD und $BCDGE$ gegen Π_1. Zu den Projectionen der beiden anderen Punkte in Δ gelangt man ähnlich wie beim Dodecaeder. Sei G_0G' das Loth aus G_0 auf BC, so ergiebt sich $G'G_1 = G_0G' \cdot \cos\delta$ und je nachdem D_1 und D_0 auf derselben oder verschiedenen Seiten von BC liegen, gilt dies auch für G_0 und G_1. Die zweite Ordinate von G ist dann $G_0G' \cdot \sin\delta$, womit s_Φ'' erhalten ist, u. s. f.

Hinsichtlich des Verbindens der Ecken zu Kanten ist zu bemerken, dass von jeder Ecke der Grundfigur zwei Kanten nach andern Ecken derselben (die sich unverkürzt in Π_1 projiciren), zwei nach der Ebene Δ und eine nach der Ebene Φ geht (die sich in der ersten Projection am stärksten verkürzt); aus jeder Ecke in Δ gehen zwei

nach der Grundfigur, zwei nach Φ, eine nach der Deckfigur. Aehnliches gilt für die Ecken der Deckfigur und die in Φ.

In Bezug auf die Lage der Ecken in der ersten Projection und die sechs ersten Umrisskanten gilt Analoges wie beim Dodecaeder.

b) Ebene Schnitte von Polyedern.

162. Wenn man *den Schnitt eines Polyeders mit einer Ebene* E construiren will, so würde man, wollte man alle Kanten zum Schnitt mit der Ebene bringen, viele unnütze Constructionen machen; denn es sind ja nur solche Schnitte von Kanten mit der Ebene Ecken der Schnittfigur, welche je zwischen den die Kante begrenzenden Polyederecken liegen. Von den Kanten in einer Fläche können (bei convexen Polyedern) höchstens zwei getroffen werden. Sucht man hingegen die Seiten der Schnittfigur, *indem man die Schnittlinien der Ebene* E *mit den Seitenflächen des Polyeders construirt*, so ist auch nur wieder ein solcher Theil einer Schnittlinie zu gebrauchen, der innerhalb des Polygons der betreffenden Fläche liegt.

Das Dodecaeder (Fig. 50, Tafel VIII) ist durch die Ebene E geschnitten; die zweite Projectionsebene ist parallel verschoben (Nr. 147—48), bis sie (als $^*\Pi_2$) durch den Mittelpunkt des Polyeders geht; wodurch sich einige Constructionen vereinfachen.

Bei einer Fläche z. B. $ABGLF$ wird man nun einen Versuch machen müssen. Hat man ihre Schnittlinie mit E als eine solche erkannt, welche das Polygon $ABGLF$ und zwar auf den Seiten FL und GB in 𝔄 und 𝔅 durchschneidet, so ist klar, dass unter den benachbarten Polygonen nur die in FL und GB anstossenden von E geschnitten werden; zu einem derselben, bez. seiner Ebene geht man nun über und ist sicher, von jetzt ab keinen unbrauchbaren Schnitt mehr zu erhalten. Alle diese Schnittlinien wird man der Genauigkeit halber durch drei Punkte bestimmen, indem man drei Gerade der Ebene, am besten Seiten oder Diagonalen des Polygons mit E zum Schnitt bringt, zunächst unbekümmert, ob sie von E innerhalb oder ausserhalb des Polygons getroffen werden; die durch diese Schnittpunkte erhaltene Schnittlinie wird dann schon die richtigen Kanten liefern. Bei jeder weiteren Seitenfläche hat man nur noch zwei Punkte zu bestimmen, indem ja die Kante, über welche man zu ihr von der vorhergehenden gelangt ist, einen Punkt enthält; z. B. 𝔄𝔅 ist bestimmt durch die drei Punkte 𝔄, V, W; 𝔅ℭ durch 𝔅, X, Y; u. s. f. Die ganze Schnittfigur ist 𝔄𝔅ℭ𝔇𝔈𝔉𝔊; 𝔈𝔉 ist offenbar parallel zu s'_E. Hat man den zweiten Endpunkt einer Seite der Schnittfigur, wie

z. B. 𝔈 auf 𝔅𝔈 nicht construirt, so ist eine Controlle, dass die Verbindungslinie der beiden Projectionen von 𝔈 normal zur Axe sein muss. Die Hauptcontrolle aber ergiebt sich bei der letzten Seite, die, ohne dass der Anfangspunkt der ersten bei ihrer Construction benutzt wird, durch denselben gehen muss.

In Bezug auf die Sichtbarkeit gilt natürlich, dass die Seiten und Ecken der Schnittfigur sich nach den Flächen und Kanten des Polyeders richten, in denen sie liegen; es sei denn, man habe den einen Theil des Polyeders ganz weggenommen; dann kommen ja gewisse Bedeckungen und scheinbaren Schnitte in Wegfall (Fig. 54, Taf. VIII).

163. *Ist die schneidende Ebene* E *zu der einen Projectionsebene senkrecht,* so ist die Projection des Schnittes in dieser Projectionsebene geradlinig; welche Kanten zwischen den Ecken und wo sie getroffen werden, ist dann auf der Stelle zu erkennen; und die andere Projection des Schnitts ergiebt sich durch einfaches Lothen. Man kann daher auch *im allgemeinen Falle* die Schnittfigur dadurch erhalten, dass *man das Polyeder und die Schnittebene* E *um eine Axe dreht, bis* E *zu der einen Projectionsebene normal ist, nun durchschneidet und dann wieder zurückdreht; oder dass man eine dritte Projectionsebene* Π_3 *einführt, die zu* E *(und z. B. zu* Π_1*) senkrecht ist, mit* Π_1 *und* Π_3 *arbeitet und aus den erhaltenen ersten und dritten Projectionen die zweiten construirt.*

164. Hat man es *mit ebenen Schnitten von Pyramiden oder Prismen* zu thun, so kann noch ein anderes Verfahren eingeschlagen werden.

Stellen wir uns zunächst der Einfachheit halber vor, dass wir es nur mit den Mänteln beider Körper zu thun haben und dass dieselben weder an der Spitze noch durch die Grundfigur, bez. durch Grund- und Deckfigur begrenzt seien, so dass wir sie uns entstanden denken durch die Bewegung einer (unendlich langen) Geraden, die, indem sie fortwährend durch einen und denselben Punkt geht, bez. einer gegebenen Richtung parallel bleibt (oder durch denselben unendlich fernen Punkt geht), auf der Grundfigur hingleitet. Diese Grundfigur wollen wir deshalb lieber *Leitfigur* nennen, die erzeugenden Linien mögen *Mantellinien* der Pyramide, bez. des Prismas heissen; in dem Falle, wo die erzeugende Linie durch eine Ecke der Leitfigur geht, wird sie eine Kante.

Die Leitfigur sei in der Ebene E gelegen, Φ sei die schneidende Ebene, k die Schnittlinie $\mathsf{E}\Phi$, O die Pyramidenspitze, bez. l eine Gerade, parallel mit den Prismenmantellinien (also der unendlich ferne Punkt von l die Spitze, wenn man das Prisma ebenfalls als Pyramide auffasst); *die Leitfigur und die Schnittfigur stehen offenbar in der Be-*

ziehung, dass jede die Projection der andern ist, wobei O im Falle der Pyramide das endliche Projectionscentrum ist, l im Falle des Prismas die Richtung der Projectionsstrahlen angiebt. Jedem Punkte der Ebene der einen Figur entspricht ein Punkt der Ebene der andern, insbesondere jeder Ecke eine Ecke, ebenso jeder Geraden eine Gerade, insbesondere jeder Seite, jeder Diagonale eine Seite, eine Diagonale: *zwei entsprechende Punkte liegen auf einer Geraden, zwei entsprechende Geraden auf einer Ebene, welche Gerade und Ebene durch O geht (bez. mit l parallel ist); zwei entsprechende Geraden treffen sich auf k.*

Ferner leuchtet ein, dass wenn ein Punkt auf einer Geraden in der einen Ebene liegt, sein entsprechender Punkt auf der entsprechenden Geraden in der andern Ebene sich befindet.

165. *Dasselbe Entsprechen findet natürlich auch zwischen den Projectionen statt;* die Verbindungslinien z. B. der ersten Projectionen entsprechender Punkte der beiden Figuren gehen durch die erste Projection O_1 von O (bez. sind parallel l_1); die Schnittpunkte der ersten Projectionen entsprechender Geraden treffen sich auf k_1.

Also *in jeder der beiden Projectionsebenen haben wir zwei ebene Systeme,* deren Punkte und Gerade sich derartig entsprechen, dass,

1) wenn ein Punkt des einen Systems auf einer Geraden desselben liegt, auch der entsprechende Punkt im andern auf der entsprechenden Geraden liegt;

2) zwei entsprechende Geraden sich auf einer festen Geraden k_1, bez. k_2 schneiden;

3) die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch denselben festen Punkt O_1, bez. O_2 gehen, oder derselben festen Richtung l_1, bez. l_2 parallel sind; d. h.

im Falle der Pyramide besteht zwischen den beiden ebenen Systemen Collinearität (Homologie) (Nr. 46), *im Falle des Prismas Affinität.*

Kennt man ein Paar entsprechender Punkte, so kann man leicht die weiteren Paare construiren. Es sei (Fig. 52*), Taf. IX) die Leitfigur $ABCDE$, die Schnittfigur $A'B'C'F'E'$, und habe man die Projectionen A_1', A_2' des Punktes A' ermittelt, indem man die Kante OA mit Φ zum Schnitte gebracht hat; so ergiebt sich B_1' auf folgende Weise:

B_1' muss zunächst auf dem Strahle liegen, der durch B_1 nach O_1 bez. parallel zu l_1 geht (Collineations- oder Homologiestrahl, bez. Affinitätsstrahl, hier Projection der Kante); ferner ziehe man A_1B_1 und durch den Punkt, wo diese Gerade die k_1 trifft, die Gerade nach A_1',

*) Die Projections-Indices sind in ihr meistens weggelassen.

so muss dieselbe B_1' ebenfalls enthalten. Ebenso erhält man C_1', D_1', E_1' und durch ähnliches Verfahren in Π_2 die Punkte B_2', C_2', D_2', E_2'; wobei man zur Controlle hat, dass $B_1' B_2'$ u. s. f. normal zur Axe sein müssen.

Für die weiteren Punkte kann man dann statt AA' ein anderes schon erhaltenes Punktenpaar benutzen, wenn jenes vielleicht unbequem liegt. Es erhellt wiederum, dass alles auf die genaue Construction des ersten Paars ankommt, und insofern gilt auch hier eine ähnliche Bemerkung wie früher, dass diese Methode abwechselnd mit der andern, durch welche jeder Kantenschnitt der Ebene E für sich construirt wird, oder nur als Controllmethode angewandt wird, besonders hinsichtlich des Zusammenlaufens entsprechender Geraden auf k_1, bez. k_2.

Sind E und Φ parallel, so liegt k im Unendlichen, die entsprechenden Geraden in Π_1, bez. Π_2 müssen sich auf der unendlich fernen k_1, bez. k_2 schneiden, sind also parallel; ist dies ja auch für die entsprechenden Geraden im Raume auf der Stelle klar.

166. Denkt man sich im Fall der *eigentlichen* Pyramide durch die Spitze O die Ebene Φ' parallel zu Φ gelegt; dieselbe schneide E in der offenbar zu k parallelen Geraden j. Es ist ersichtlich, dass jeder Strahl der von O nach einem Punkte J von j geht, da er in Φ' liegt, zu Φ parallel ist; gehen durch J in E zwei Gerade a und b, so werden ihre entsprechenden Geraden a' und b' in Φ durch die Ebenen eingeschnitten, welche durch die zu Φ parallele Gerade OJ und a, bez. b gehen, sind mithin parallel, haben die Richtung gemein. Also gehen die Punkte von j in Φ in Richtungen, in unendlich ferne Punkte über; der Geraden j in E entspricht die unendlich ferne Gerade in Φ, ihre Schnittlinie mit Φ'.

Die Gerade j heisst die *Fluchtgerade* in E*). Da Convergenz und Parallelismus bei Parallelprojection erhalten bleibt, so gilt das nämliche auch in den Projectionsebenen; also wenn zwei Gerade des ebenen Systems z. B. in Π_1, zu dem die Figur $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ gehört, sich auf j_1 treffen, so sind die entsprechenden Geraden in dem andern Systeme parallel.

Ein Punkt auf j_1 hat seinen entsprechenden in dem unendlich fernen Punkte des durch ihn gehenden Collineationsstrahls.

Dies kann zur Construction benutzt werden, wenn man die Projectionen der Geraden j kennt, z. B. schon für die Construction von A'. Zunächst liegt also A_1' auf dem Strahl $O_1 A_1$; ferner sei x_1

*) Ebenso hat Φ eine Fluchtgerade, die der unendlich fernen von E entspricht.

eine durch A_1 gehende Gerade, welche j_1 in J_1 treffe; so ist dessen entsprechender Punkt der unendlich ferne auf $O_1 J_1$, folglich ist die entsprechende Gerade x_1' zu x_1 die, welche durch den Punkt $k_1 x_1$ parallel zu $O_1 J_1$ geht, und auf ihr liegt A_1'.

Ebenso muss z. B., nachdem B_1' auf die obige Weise gefunden, folgende Controlle eintreffen: der Collineationsstrahl, der (von O_1) nach dem Punkt $(j_1, A_1 B_1)$ geht, muss zu $A_1' B_1'$ parallel sein.

167. Angenommen nun, die Gerade j treffe die Figur $ABCDE$ und zwar die Seiten AB und DE in zwei Punkten K und L (Fig. 53, Taf. X), so dass die Ebene Φ' die nach K und L gehenden Mantellinien aus der Pyramidenfläche ausschneidet und Φ selbst denselben parallel ist, so gehen diese beiden Punkte in der Schnittfigur in unendlich ferne über. Das Schnittfünfeck $A'B'C'D'E'$ hat drei endliche Seiten $B'C'$, $C'D'$, $E'A'$ und zwei unendlich lange $A'B'$ und $D'E'$, von welchen Linien nämlich zum Perimeter der entstandenen Figur $A'B'C'D'E'$ die beiden je durch das endliche Stück $A'B'$ bez. $D'E'$ ergänzten unendlich langen und durch den unendlich fernen Punkt K_∞', bez. L_∞' verbundenen Strecken gehören. Den beiden Theilen μ und ν des Innenraumes von $ABCDE$, die durch j entstanden sind, entsprechen die beiden Innenräume μ' und ν'. Wie die beiden Perimetertheile von $ABCDE$ in den Punkten K und L und die Flächentheile μ, ν in der Geraden KL zusammenhängen, so hängen, sagt man, die beiden Perimetertheile und Flächentheile von $A'B'C'D'E'$ im Unendlichen zusammen.

Die beiden Perimetertheile von $A'B'C'D'E'$ liegen ersichtlich auf den beiden durch die Spitze geschiedenen Mänteln; die Mantellinien werden, je nachdem sie nach dem einen Theile $KAEL$ oder nach dem andern $KBDCL$ gehen, von Φ auf der einen oder der andern Seite der Spitze getroffen; indem die nach K und L gehenden im Unendlichen getroffen werden, geschieht der Uebergang.

Streift j die Figur $ABCDE$ gerade in einer Ecke, so geht die entsprechende Ecke in der Schnittfigur ins Unendliche, also die anstossenden Seiten werden parallel.

Je nachdem also *die durch die Pyramidenspitze parallel zur Schnittebene geführte Ebene die Leitfigur in zwei Punkten (die Pyramide in zwei Mantellinien) schneidet, in einer Ecke (längs einer Kante) streift (oder berührt) oder gar nicht (nur in der Spitze) trifft, erhält man einen in zwei im Unendlichen zusammenhängende Theile zerfallenden Schnitt, einen Schnitt mit zwei parallelen benachbarten Seiten, einen im Endlichen geschlossenen Schnitt.*

168. Denkt man sich nun aber die Pyramide durch die Spitze

einerseits, durch die Leitfigur andererseits begrenzt, so fällt ein etwaiger Theil des Schnitts, der dem fehlenden Mantel angehört, sowie wenn die Ebene Φ und also auch die Gerade k die Leit- oder Grundfigur (in Q und R) durchschneidet, der nicht zwischen Spitze und Grundfigur befindliche Theil weg und die offene Figur wird also durch QR geschlossen. Aehnliches gilt, wenn man ein Prisma durch eine Grund- und eine Deckfigur begrenzt, bei beiden Figuren.

169. *Die wahre Gestalt des Schnitts* findet man durch Umlegung der Ebene desselben. *Liegt aber die Leit- oder Grundfigur in der einen Projectionsebene selbst, z. B. in* Π_1, *und wird auch die Schnittfigur in dieselbe umgelegt, so ergiebt sich ebenfalls Collinearität zwischen beiden.* Denn das in Nr. 164 geschilderte Entsprechen zwischen den Punkten und Geraden der Ebene der Grund- und der der Schnittfigur wird durch die Umlegung nicht geändert; ebenso gilt ersichtlich noch, dass wenn in der Ebene der Grundfigur A auf a liegt, in der umgelegten Ebene der Schnittfigur A_0' auf a_0' liegt; ferner dass wie vor der Umlegung sich zwei entsprechende Geraden a und a' in beiden Ebenen auf deren Schnittlinie treffen, das ist jetzt auf der ersten Spurlinie $s \equiv s'$ der Ebene Φ des Schnittes, dies auch nach der Umlegung noch statthat.

Es bleibt der Beweis übrig, dass *wie vor der Umlegung des Schnitts die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch den Punkt O gehen, auch nach der Umlegung entsprechende Punkte durch Linien verbunden sind, die in einem festen Punkte von* Π_1 *zusammenlaufen.*

Wir nehmen zunächst an, dass wir es mit einer *eigentlichen Pyramide* zu thun haben, so dass O nicht unendlich fern ist; sei Φ' wiederum die durch O zur Schnittebene Φ (in der ursprünglichen Lage) parallel geführte Ebene, welche $E \equiv \Pi_1$ in j treffe, ferner O_0 der mit dieser Ebene um ihre erste Spurlinie j umgelegte Punkt O; A und A' irgend zwei entsprechende Punkte in Π_1 und Φ, also mit O in gerader Linie, A_0' die Umlegung von A' mit Φ um s, wobei noch bemerkt werden muss, dass die Umlegungen von Φ und Φ' parallel, also um dieselben Neigungswinkel gegen Π_1 geschehen.

Es sei irgend eine Gerade a' durch A' in Φ gezeichnet, ihre entsprechende Gerade a, welche durch A geht, wird in Π_1 durch die Ebene Oa' eingeschnitten; a begegnet sich auf s mit a' in S und auf j in J mit der Parallelen durch O zu a', welche von derselben Ebene $Oa'a$ aus der Parallelebene Φ' von Φ ausgeschnitten wird. Durch die gleichzeitige Umlegung von Φ und Φ' bleibt der Parallelismus erhalten: also $A_0'S \parallel O_0J$. Wir verbinden A mit A_0' und mit O_0. Vor der Umlegung sind A, A', O in gerader Linie, folglich wegen des Parallelis-

mus von $A'S$ und OJ die in der Ebene Oaa' gelegenen Dreiecke $A'SA$ und OJA ähnlich, also

$$OJ : JA = A'S : SA;$$

mithin auch, da $OJ = O_0J$, $A'S = A_0'S$,

$$O_0J : JA = A_0'S : SA;$$

dazu kommt wegen des Parallelismus von O_0J und $A_0'S$ die Gleichheit der Winkel O_0JA und $A_0'SA$, folglich sind auch die Winkel O_0AJ und $A_0'AS$ gleich, d. h. A_0', A, O_0 liegen in gerader Linie. Damit ist die Collinearität der in Π_1 gelegenen Grundfigur mit der nach Π_1 umgelegten Schnittfigur bei der Pyramide nachgewiesen.

170. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass, wenn eine Gerade a des ebenen Systems der Grundfigur die Gerade j in J trifft, dann die entsprechende Gerade a_0' des umgelegten ebenen Systems der Schnittfigur parallel O_0J ist, also wenn zwei Gerade a und b jenes Systems sich in dem Punkte J auf j treffen, dann sind die ihnen entsprechenden a_0', b_0' mit O_0J parallel, demnach auch einander. Den Punkten von j entsprechen folglich unendlich ferne Punkte: in der That lässt man den Punkt A auf a dem Punkte J immer näher kommen, so nähert sich ja O_0AA_0' der O_0J und also dem Parallelismus mit a_0' und ihr Schnittpunkt A_0' mit a_0' entweicht in immer grössere Ferne.

Die Gerade j ist also die Fluchtgerade des ebenen Systems der Grundfigur.

Die Umlegung der Schnittfigur (Fig. 54, Taf. VIII) kann, nachdem j und O_0 construirt sind, in folgender Weise gefunden werden. Um z. B. C_0' zu finden, zieht man (vergl. Nr. 166) den Collineationsstrahl O_0C, darauf durch C die beliebige Gerade c, welche s in S, j in J trifft, und durch S zu O_0J die Parallele c_0', welche O_0C in C_0' trifft; wählt man stets (oder wenigstens wiederholt) denselben Punkt J auf j, so bleibt die Richtung dieser Parallelen dieselbe.

B_0' findet man entweder auf dieselbe Weise, oder schneller, indem man C, C_0' schon benutzend, C_0' mit dem Punkte (s, CB) verbindet und diese Verbindungslinie mit dem Collineationsstrahle O_0B zum Schnitte bringt (vergl. Nr. 165).

Es ist gut, zeitweise zur Controlle den Schnittpunkt der Ebene Φ mit einer Pyramidenkante auf die gewöhnliche Art zu ermitteln und umzulegen, besonders wenn man aus einem Punktenpaare mehrere andere construirt.

171. Dass der in Nr. 169 gelieferte Beweis für die Collinearität der beiden ebenen Systeme nur für den Fall gilt, dass die Spitze O

ein eigentlicher Punkt ist, ist einleuchtend; Φ' und j sind im andern Falle mit O ins Unendliche gegangen. Wir haben mithin noch den Fall *des Prismas* besonders zu untersuchen.

Es seien also A und A', B und B' zwei entsprechende Punkte der Ebene Π_1 der Grundfigur und der Ebene Φ der Schnittfigur, d. i. $AA' \parallel BB'$; wir ziehen in Φ aus A' und B' bis zur Schnittlinie $s = \Pi_1 \Phi$ die Parallelen $A'A''$, $B'B''$; so sind die Ebenen $AA'A''$, $BB'B''$ parallel, weil $AA' \parallel BB'$ und $A'A'' \parallel B'B''$, mithin auch ihre Schnittlinien AA'', BB'' mit Π_1; demnach ist $A'A'' : AA'' = B'B'' : BB''$; da nun durch die Umlegung von Φ weder die Lage noch die Grösse der Linien in Φ geändert wird, so ist

$$A_0'A'' : AA'' = B_0'B'' : BB''$$

und $A_0'A'' \parallel B_0'B''$; also $\sphericalangle A_0'A''A = B_0'B''B$, demnach die gleichnamigen Dreiecke ähnlich und $A_0'A \parallel B_0'B$.

Die Verbindungslinien der Punkte des Systems der Grundfigur mit je dem entsprechenden des umgelegten Systems der Schnittfigur sind parallel; also besteht zwischen den Systemen Affinität.

Um die Richtung der Affinitätsstrahlen zu erhalten, ist es demnach nothwendig zu einem Punkte des ersteren Systems z. B. zu der Ecke A der Grundfigur durch die gewöhnliche Schnittmethode und Umlegung den entsprechenden A_0' zu construiren. Die weiteren Punkte der Umlegung werden dann nach den schon früher besprochenen Regeln der Affinität construirt.

172. *Man hat auf diese Weise die Umlegung der Schnittfigur vor den Projectionen derselben erhalten.* Diese sind nun sehr leicht zu ermitteln; denn z. B. A_1' (Fig. 54) muss auf der ersten Projection der durch A gehenden Pyramiden- oder Prismenkante liegen; andererseits auf der aus A_0' auf die erste Spurlinie s gefällten Normale. Hat man bei einer eigentlichen Pyramide den Punkt J (Nr. 170) in den Schnittpunkt $(j, O_0 O_1)$ gelegt, so geben die zu $O_0 J$ parallelen Geraden gleichzeitig A_0' und A_1', B_0' und B_1' u. s. f., leider aber treten in diesem Falle zu leicht schleifende Schnitte auf.

Es ist ersichtlich, dass z. B. auch $A_1'D_1'$ durch den Punkt auf s geht, in dem A_1D_1 und $A_0'D_0'$ zusammenlaufen.

Die zweite Projection findet man durch Lothen. Als Controlle für letztere ergiebt sich, dass z. B. $A_2'D_2'$ die Axe senkrecht über dem eben genannten Punkte auf s treffen muss.

c) Gegenseitige Schnitte von Polyedern.

173. Wir wenden uns zuerst zur Construction *des gegenseitigen Schnitts von Pyramiden und Prismen*, wobei wir dieselben wiederum weder durch die Spitze noch durch die Leitfigur begrenzt denken.

Man durchschneidet beide Pyramiden durch Ebenen, welche aus ihnen Mantellinien ausschneiden, also durch die Spitzen von beiden gehen, demnach bei einem Prisma den Mantellinien (und Kanten) desselben parallel sind; alle diese Hilfsebenen gehen dann durch die Verbindungslinie der beiden Spitzen S und T, d. i. wenn eine der beiden Flächen ein Prisma ist, durch die Linie, welche von der Spitze der Pyramide parallel zu den Prismenkanten geht, mithin nach der unendlich fernen Prismenspitze; sind aber beide Flächen Prismen, so ist diese Linie ST, weil sie zwei unendlich ferne Punkte verbindet, ganz unendlich fern, die Hilfsebenen sind parallel, sind sie ja doch alle sowohl den Kanten des einen, als denen des andern Prismas parallel.

174. Wir nehmen nun zuerst an, *die beiden Leitfiguren* σ *und* τ *befinden sich in derselben Ebene* E (Fig. 55, Taf. XI, in welcher die beiden Figuren $\sigma = ABC$ und $\tau = DEF$ nach der Methode von Nr. 104 in dieselbe Ebene gebracht sind); die E-Spurlinien der Hilfsebenen gehen demnach alle durch den E-Spurpunkt U der genannten Linie ST. Derselbe ist im Falle zweier Prismen unendlich fern (da die ganze ST es ist), weshalb die Spurlinien parallel sind, wie dies ja auch der Parallelismus der Hilfsebenen bedingt. Um in diesem Falle die Richtung der E-Spurlinien zu erhalten, wird man durch irgend einen Punkt P die Ebene parallel den Kanten beider Prismen und ihre E-Spurlinie construiren, d. h. durch den Punkt die Parallelen g und l zu den Prismenkanten ziehen und ihre E-Spurpunkte ermitteln. Durchschneidet nun eine solche E-Spurlinie beide Leitfiguren σ und τ, so erhält man in den Mantellinien, die nach diesen Schnittpunkten gehen, die vier von der betreffenden Ebene ausgeschnittenen und in ihren vier gegenseitigen Schnittpunkten vier Punkte der Schnittfigur. Es genügt offenbar, blos mit den einen z. B. den ersten Projectionen der Spurlinien, der Leitfiguren, der Mantellinien zu arbeiten und die erhaltenen ersten Projectionen der Schnittpunkte auf die zweiten Projectionen der betreffenden Mantellinien zu lothen; genauer freilich ist es, wenn in beiden Projectionsebenen gearbeitet wird.

Ueberlegt man nun, dass die Ecken der Schnittfigur schon die Seiten liefern, die Ecken aber von den Kanten der einen oder andern Fläche herrühren, so wird man nur solche Hilfsebenen wählen, welche aus einer oder der andern Fläche Kanten ausschneiden, und also nur

solche Spurlinien, welche durch eine Ecke einer der Leitfiguren gehen; die andere Mantellinie, die derselben Fläche angehört wie die Kante, wird fallen gelassen; die Punkte dagegen, in denen die Kante die aus der anderen Fläche ausgeschnittenen Mantellinien trifft, sind ihre Begegnungspunkte mit den beiden Seitenebenen, in denen diese Mantellinien liegen, und zwei Ecken der Schnittfigur.

175. Brauchbare Ebenen (und Spurlinien) sind natürlich nur solche, welche beide Pyramiden (bez. beide Leitfiguren) durchschneiden; es wird also zwei Grenzebenen (Grenzspurlinien) geben, welche die eine Pyramide längs einer Kante (die zugehörende Leitfigur in einer Ecke) streifen (berühren), die andere durchschneiden.

Nun *sind zwei Fälle möglich.* Entweder verhalten sich die beiden Grenzebenen gleichartig, streifen die eine Pyramide, durchschneiden die andere; dann treffen alle Kanten der ersteren die letztere; dagegen nicht umgekehrt: die Grenzebenen schliessen zu beiden Seiten Kanten der letzteren aus, die die erstere nicht treffen; die Schnittfigur muss in zwei Theile zerfallen; die letztere Pyramide wird von der andern *durchdrungen.* Oder die Grenzebenen verhalten sich gegen die beiden Pyramiden ungleichartig; dann gibt es auf jeder Kanten, die von der andern nicht getroffen werden: die Schnittfigur besteht blos aus einem Zuge; wir haben den Fall der *Ausreissung* (Arrachement); er liegt in Fig. 55 vor.

176. Wenn *die Leitfiguren* σ *und* τ *in verschiedenen Ebenen* E *und* Φ *liegen* (Fig. 56, Taf. XI), hat man offenbar je eine E-Spurlinie und eine Φ-Spurlinie, von denen die eine die Leitfigur σ, die andere die τ durchschneidet (und durchschneiden muss, wenn die Ebene brauchbar sein soll). Beide müssen sich stets auf der Schnittlinie $k = \text{E}\Phi$ treffen. Andererseits müssen die E-Spurlinien alle durch den Punkt (E, ST), die Φ-Spurlinien alle durch (Φ, ST) gehen; bez. wenn wir es mit zwei Prismen (wie in Fig. 56) zu thun haben, sind die Richtungen der einen und der andern zu bestimmen, indem durch einen beliebigen Punkt P die Parallelen g und l zu den Kanten des einen und des andern Prismas gezogen und deren Schnittpunkte mit E und Φ ermittelt werden, wodurch sich die Geraden e und f ergeben, welche die gesuchten Richtungen haben und sich auf k schneiden; es genügt, die einen Projectionen derselben zu besitzen. Die Figur bietet den Fall der Durchdringung.

177. Bewegt man die Hilfsebene von der einen Grenzebene zur andern und zurück und nimmt jedesmal blos eine der beiden Ecken, welche durch jede Hilfsebene sich ergeben, so erhält man den Zusammenhang der Schnittfiigur, sobald man als Fundamentalregel dabei beobachtet, dass *zwei benachbarte Ecken der Schnittfigur nothwendig beide sowohl in*

einer und derselben Fläche des einen Polyeders, als auch beide in einer und derselben Fläche des andern liegen, indem ja das Stück der Schnittlinie beider Flächen, welches innerhalb der Begrenzung der einen und der anderen Fläche liegt, die jene Ecken verbindende Seite der Schnittfigur ist.

Zu dem Zwecke ist es gut, ein genaues Verzeichniss darüber gleich bei der Construction aufzustellen, von welcher Kante des einen und Fläche des andern Polyeders jede Ecke der Schnittfigur herrührt.

Z. B. in Figur 55 ist, wenn der Kürze halber die Seiten-Kanten und Flächen blos durch die Ecke und Seite der Grundfigur, durch welche sie gehen, bezeichnet werden: $1 = (A, ED)$, $4 = (A, EF)$, $5 = (C, EF)$, $8 = (C, ED)$, $2 = (D, AB)$, $7 = (D, BC)$, $3 = (F, AB)$, $6 = (F, BC)$; also, wie fast unmittelbar hieraus abzulesen ist, $12 = (ED, AB)$, $23 = (AB, DF)$, $34 = (AB, EF)$, $45 = (AC, EF)$, $56 = (BC, EF)$, $67 = (BC, DF)$, $78 = (BC, DE)$, $81 = (DE, AC)$.

In Fig. 56 ist $12 = (AD, EG)$, $23 = (AD, GF)$, $34 = (AB, GF)$, $45 = (AB, EF)$, $51 = (AD, EF)$; $67 = (DC, GE)$, $78 = (BC, GE)$, $89 = (BC, GF)$, $9{,}10 = (BC, EF)$, $10{,}6 = (DC, EF)$.

178. Findet eine *Begrenzung* einer Pyramide durch die Spitze statt, so ist die Modification einfach, wenn diese Spitze innerhalb der andern Pyramide liegt; es ist ersichtlich, dass dann nur der Fall der Durchdringung eintreten kann und also von den beiden Theilen der Schnittfigur der eine wegfällt: man wird natürlich schon bei der Construction solche Punkte, die jenseits der Spitze fallen, weglassen.

Etwas umständlicher ist es, wenn eine der Pyramiden, z. B. (S, σ), durch eine Grundfigur σ (bez. beim Prisma auch noch durch eine Deckfigur) begrenzt ist und die Ebene E derselben der Schnittfigur begegnet. Es ist zunächst selbstverständlich, dass alle Punkte der Schnittfigur, die jenseits dieser begrenzenden Ebene liegen, wegzulassen sind; diese Schnittfigur wird dann offen und durch den Schnitt der Ebene E mit der andern Pyramide (T, τ) wieder geschlossen und zwar in folgender Weise: Sei η der Schnitt der Ebene E mit der Pyramide (T, τ), so durchdringen sich in dem vorliegendem Falle diese beiden Figuren σ und η: der Theil von σ, der innerhalb η liegt, liegt innerhalb der Pyramide (T, τ), gehört also nicht zum Schnitt und ist entweder ganz wegzulassen oder als unsichtbar zu behandeln (s. nächste Nr.); dagegen der Theil von η, der innerhalb σ liegt, vervollständigt gerade den Schnitt der beiden Pyramiden, während der ausserhalb liegende ganz wegzulassen ist, da ja die Ebene E durch σ begrenzt ist.

Wenn also die Grundfigur der einen Pyramide in die andere eindringt, was man in sehr vielen Fällen bald aus der Zeichnung erken-

nen wird, so empfiehlt es sich vielleicht, nicht der in Nr. 173 — 176 gezeigten Methode, welche unbegrenzte Mäntel voraussetzt, sich zu bedienen, sondern die im Nachfolgenden gezeigte allgemeine Methode, den Durchschnitt zweier Polyeder zu construiren, anzuwenden.

179. In Betreff der *Sichtbarkeit* ist Folgendes zu merken: Zuerst hat man bei jedem der beiden Polyeder die Kanten und Flächen festzustellen, welche sichtbar oder unsichtbar wären, wenn das andere nicht vorhanden wäre, und damit auch die beiden Umrisse. *Eine Seite der Schnittfigur ist unsichtbar, wenn auch nur eine der beiden Flächen, die sich in ihr durchschneiden, unsichtbar ist.* Aus dem Lothen der scheinbaren Schnittpunkte der Umrisse nach der andern Projectionsebene erkennt man, welcher von den beiden Umrissen bei einem solchen scheinbaren Schnittpunkte unter (bez. hinter) dem andern verschwindet und also unsichtbar wird. Jede Figur, die auf dem Mantel eines Polyeders von einer Fläche zur andern herumläuft, wechselt offenbar ihre Sichtbarkeit, wo sie eine Umrisskante trifft, die an der betreffenden Stelle sichtbar ist; sie ist zu beiden Seiten des Begegnungspunktes unsichtbar, wenn die Umrisskante dort selbst unsichtbar ist. *Die Durchschnittsfigur geht* also *von der Sichtbarkeit zur Unsichtbarkeit über* (*oder umgekehrt*), *wenn sie eine Umrisskante des einen oder des andern Polyeders trifft an einer Stelle, wo dieselbe sichtbar ist.*

Kanten ferner des einen Polyeders, welche sichtbar sind, wenn das andere nicht vorhanden ist, werden unsichtbar, sobald sie unter (hinter) den Umriss des andern treten, was wieder an scheinbaren Schnittpunkten mit diesem Umrisse durch Lothen nach der andern Projectionsebene zu ermitteln ist.

Stücke von Kanten des einen Polyeders, die in dem andern liegen, werden am besten ganz ausgelassen, besonders wenn sie einen Austritts- und einen Eintrittspunkt haben, sodass leicht das fehlende Stück ergänzt werden kann; in dem andern Falle würde man sie ausziehen, weil dann möglicherweise wichtige Theile des Polyeders fehlen könnten und dasselbe nicht zu erkennen wäre, jedenfalls aber mit einer andern Art Punktirung als sie bei vorhandenen aber unsichtbaren Kanten, bez. Kantentheilen angewandt wird, z. B. — · · — wie in Fig. 57. Natürlich ist die ganze Zeichnung gleichartig zu behandeln.

Die Zeichnung gewinnt an Deutlichkeit, wenn die Polyeder und dann die Durchschnittsfigur verschiedenfarbig ausgezogen werden. Es ist darauf zu achten, dass eine Kante, wenn sie in eine unsichtbare Fläche des andern Polyeders eindringt, vorher beim Passiren des Umrisses desselben unsichtbar geworden ist (wofern sie nicht ganz unsichtbar ist.

180. Soll nun *der Durchschnitt irgend zweier Polyeder* construirt werden, so muss zunächst wieder mit einem Versuche angefangen werden.

Man hat also eine Fläche des einen und eine des andern herauszugreifen, von denen man vermuthet, dass ein Stück ihrer Schnittlinie innerhalb der Begrenzungspolygone beider Flächen liegt.

In Fig. 57, Taf. XII, in welcher der Durchschnitt eines fünfseitigen Prismas und eines regulären Octaeders construirt ist, wurde der Versuch in folgender Weise gemacht: Das Prisma ist zunächst mit der ersten projicirenden Ebene der Octaederkante FG durchschnitten; die zweite Projection $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2\mathfrak{E}_2$ des Schnitts, welche leicht herzustellen ist, wird von der (begrenzten) F_2G_2 getroffen, und zwar auf $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, was beweist, dass die Kante FG die Prismenfläche $ABB'A'$ schneidet; also sind $ABB'A'$ und FGL (ebenso FGK) zwei Flächen, welche einen brauchbaren Schnitt haben. Ein (zweiter) Punkt S dieses Schnitts ergiebt sich nach Nr. 102 f, indem die zweiten Projectionen l_2 und m_2 von Geraden gesucht werden, die bez. in diesen Flächen liegen und die erste Projection gemeinsam haben; der Genauigkeit halber wird man noch einen dritten construiren.

Von der so gefundenen Schnittlinie liegt das Stück 12 sowohl innerhalb $AA'B'A$, als innerhalb FGL (dass die beiden Projectionen von 2 senkrecht über einander liegen, dient auch als Controlle). Da 2 auf AA' liegt, so bleibt die Schnittfigur noch in der Fläche FGL, verlässt aber $AA'B'B$ und geht über auf die Nachbarfläche $AA'E'E$, deren Schnittlinie mit FGL nun zu suchen ist, d. i. ausser 2 noch ein oder zwei Punkte derselben; von derselben liegt nun nothwendig ein Stück innerhalb beider Figuren und zwar 23; bei 3 wird die Fläche FGL verlassen und zur Fläche GLH übergegangen, die nun mit $AA'E'E$ zum Schnitt zu bringen ist. Wir erhalten (indem beim Prisma die obige Abkürzung benutzt wird) weiter:

$34 = (AE, GLH)$, $45 = (AB, GLH)$, $56 = (AB, GHK)$, $67 = (BC, GHK)$, $78 = (A'B'C'D'E', GHK)$, $89 = (A'B'C'D'E', GHL)$, $9{,}10 = (A'B'C'D'E', LHI)$, $10{,}11 = (CD, LHI)$, $11{,}12 = (DE, LHI)$, $12{,}13 = (DE, GLH)$, $13{,}14 = (DE, LGF)$, $14{,}15 = (DE, FLI)$, $15{,}16 = (CD, FLI)$, $16{,}17 = (BC, FLI)$, $17{,}18 = (BC, FIK)$, $18{,}19 = (BC, FKG)$, $19{,}1 = (AB, FKG)$.

Als Controlle dient, dass das Schnittpolygon zu dem Punkte 1 zurückkehrt.

181. Es ist hieraus ersichtlich, dass nur am Anfang ein Versuch nothwendig ist.

Aber *die Durchschnittsfigur kann aus mehreren Theilen bestehen* und

jeder Theil erfordert dann wieder einen Anfangsversuch, und das ist das Unangenehme dieser Construction, wozu dann noch kommt, dass über die Zahl dieser Theile sich gar nichts bestimmen lässt.

Für die Untersuchung, ob *man den Durchschnitt erschöpft hat*, mögen folgende Bemerkungen dienen. Es werden sich jedenfalls leicht stets auf jedem Polyeder Ecken constatiren lassen, die ausserhalb des andern liegen (z. B. dadurch, dass auch nur eine Projection ausserhalb des Umrisses des andern sich befindet); ebenso haben sich auch vielleicht durch die Construction selbst Ecken ergeben, die innerhalb des andern liegen.

Jede Kante des einen Polyeders, deren beide Ecken ausserhalb des andern liegen, trifft dasselbe gar nicht oder zweimal (wofern wir convexe Polyeder voraussetzen); hingegen einmal, wenn die eine Ecke ausserhalb, die andere innerhalb liegt. Jeder Kantenzug des einen Polyeders (Reihe von zusammenhängenden Kanten), von dem beide Endpunkte innerhalb oder beide ausserhalb des andern liegen, muss letzteres in einer geraden Anzahl von Punkten oder in keinem treffen, z. B. also auch ein geschlossener Kantenzug, wovon der einfachste Fall der Perimeter einer Seitenfläche ist. Liegt aber der eine Endpunkt eines Kantenzugs innerhalb, der andere ausserhalb, so ist die Zahl der Begegnungspunkte ungerade.

Befindet sich ein Eckpunkt eines Kantenzugs auf einer Fläche des andern Polyeders und zwar so, dass die beiden in ihm zusammenstossenden Kanten auf derselben Seite der Fläche liegen, die Fläche mithin von dem Kantenzug nicht durchschnitten, sondern nur gestreift, berührt wird, so zählt diese Begegnung zweifach; es findet unmittelbar hinter einander Ein- und Austreten (oder umgekehrt) statt; ähnliches gilt, wenn eine Kante des einen Polyeders eine des andern trifft, aber letzteres streift (nicht in dasselbe eindringt). Auch bei der Construction der Durchschnittsfigur selbst bereitet das Liegen einer Ecke des einen Polyeders in einer Fläche des andern Schwierigkeit, weil zweifelhaft ist, auf welche Fläche überzugehen ist; es wird also ein neuer Versuch nothwendig. Hingegen, wenn zwei Kanten sich schneiden, geht man gleichzeitig auf beiden Polyedern zu neuen Flächen über.

Das in Nr. 179 hinsichtlich der Sichtbarkeit ist schon für den allgemeineren Fall gesagt.

d) Abwickelung der Polyeder.

182. Die Abwickelung eines *Pyramidenmantels* kann auf keine andere Weise geschehen, als dass die Seitenflächen in wahrer Gestalt hergestellt und an einander gelegt werden.

Einen *Prismenmantel* dagegen wickelt man am besten mit Hilfe eines Normalschnitts ab, den man entweder auf die gewöhnliche Weise oder nach Anleitung von Nr. 146 d) ermittelt. Dieser Normalschnitt verwandelt sich ersichtlich bei der Abwickelung in eine Gerade; die Kanten werden auf derselben in den Punkten, wo die Seiten zusammenstossen, normal errichtet und auf jeder die wahre Entfernung der Ecke des Normalschnitts von den Ecken der Grund- und Deckfigur aufgetragen, welche bei Anwendung von Nr. 146 d) unmittelbar aus der dritten Projectionsebene zu entnehmen sind.

183. Die Abwickelung des *Würfels* geschieht, indem alle Seitenkanten und drei Kanten der Deckfigur aufgeschnitten werden; die des *Tetraeders* durch Aufschneidung der 3 Seitenkanten. Beim *Octaeder* schneidet man von einem der drei Quadrate drei Seiten auf und von einem zweiten zwei anstossende Seiten; beim *Dodecaeder* (in der Stellung von Nr. 159) die ersten Umrisskanten bis auf eine und die 10 Kanten, welche von den beiden mittleren Ebenen bez. nach der Grund- und Deckfigur gehen; beim *Icosaeder* endlich die fünf Kanten, die nach einer Ecke führen, die fünf nach der Gegenecke und noch eine Kante.

Durch Drehungen um die nicht aufgeschnittenen Kanten bringt man dann alle Flächen in eine Ebene. In der Abwickelung kommen natürlich die aufgeschnittenen Kanten zweifach, die Ecken, durch welche h aufgeschnittene Kanten gehen, h-fach vor.

184. *Es soll nun eine Figur, die von einer Fläche des Polyeders in die andere übergeht, in die Abwickelung eingetragen werden* (In Fig. 58, Taf. IX ist das Octaeder von Fig. 57, Taf. XII und seine Durchschnittsfigur mit dem Prisma abgewickelt). Sie hat entweder nur Ecken auf den Kanten des Polyeders, wie die ebenen Schnitte, oder auf den Kanten und im Innern der Flächen, wie die gegenseitigen Schnitte der Polyeder.

Erstere sind sehr leicht auf die Kanten der Abwickelung überzutragen (und natürlich zweimal, wenn die Kante in der Abwickelung zweimal vorkommt), indem man einfach die Kante nach demselben Verhältniss theilt, wie z. B. ihre erste Projection durch die der Ecke der Figur, um deren Eintragung es sich handelt, getheilt ist (Nr. 10). Im andern Falle, wo der einzutragende Punkt im Innern der Fläche liegt, z. B. Punkt 15 innerhalb LIF in Fig. 57, Taf. XII; ziehe man z. B. von 15_2 die Gerade nach einer Ecke I_2; trifft nun $15_2 I_2$ die Seite $L_2 F_2$ in M_2, so wird M_2 übertragen auf $L^* F^* I^*$, wenn

$L^*F^*I^*$ die Abwickelung von FLI ist*), als M^* wie eben gezeigt, und man erhält in M^*I^* einen Ort für 15*. Auf ähnliche Weise verschafft man sich einen zweiten und hat in beider Schnitt 15* selbst, oder man benutzt die Proportionalität auf IM.

Die Abwickelung der Figur wird natürlich meistens zerrissen sein.

---

*) In der Figur 58 fehlen die Sterne als nicht nothwendig.

Fig. 1. a.

Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 4.

Fig. 9.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 15.

Fig. 18.

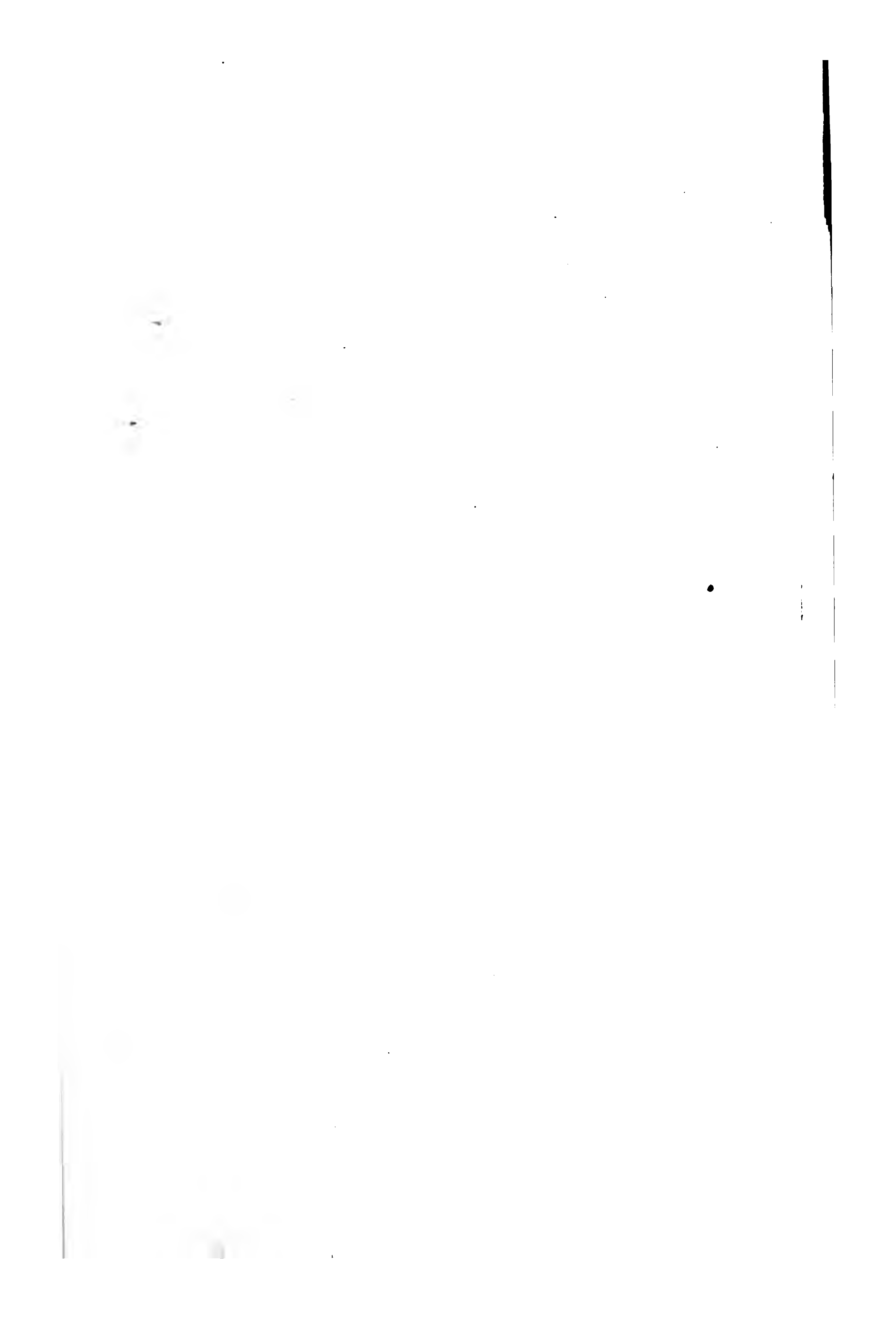


Fig. 21.

Fig. 2

a)

Fig. 20.

b)

Fig. 22.

Fig. 24.

a)

Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 36.

Fig. 34.

Fig. 33.

Fig. 40.

g. 42.

Fig. 44.

Fig. 47.

Fig. 46.

Fig. 51.

Fig. 50.

Fig. 54.

Fig. 58.

Fig. 52.

L'_∞

E'

v'

K'_∞

A'

Fig. 53.

L'_∞

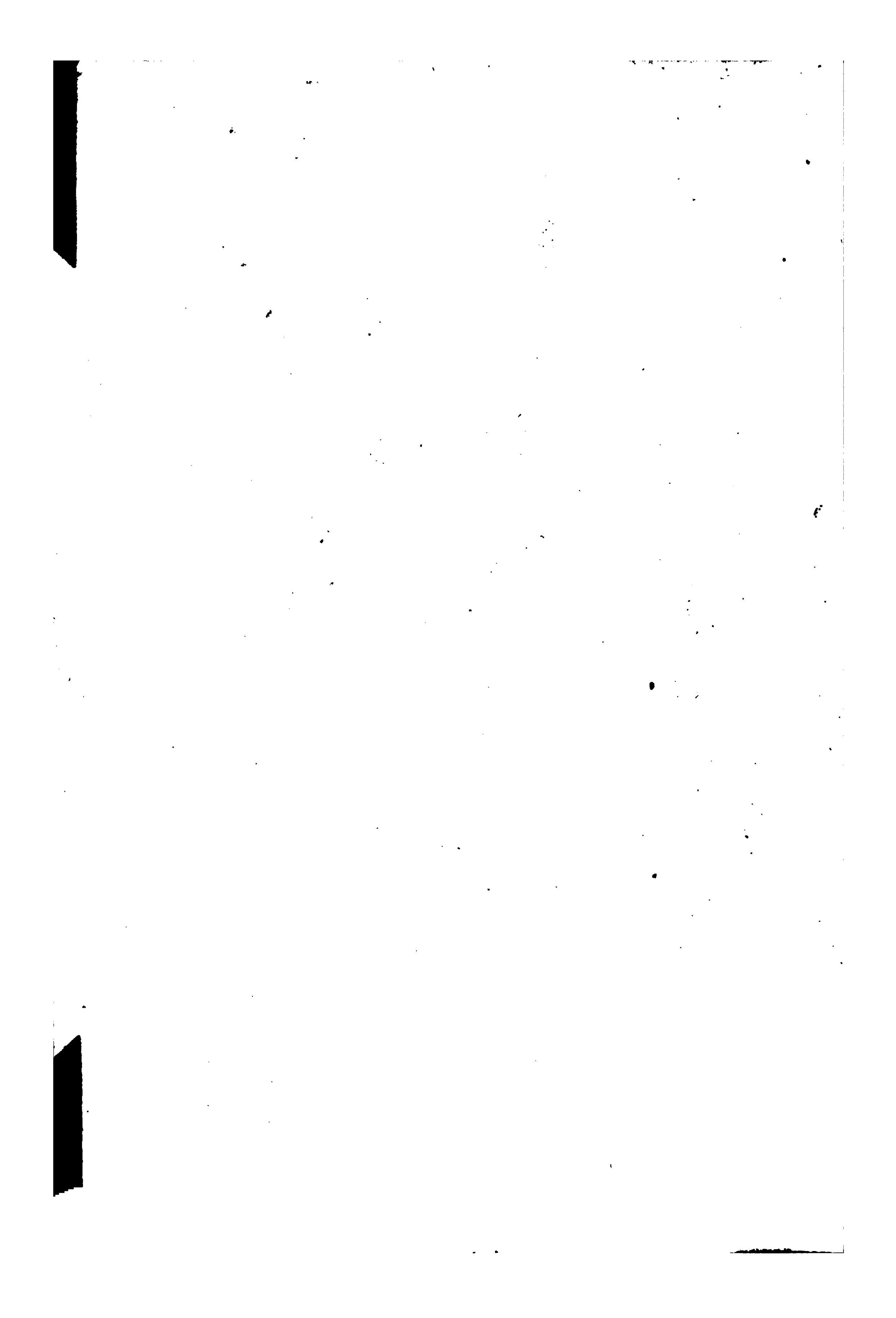
E'

v'

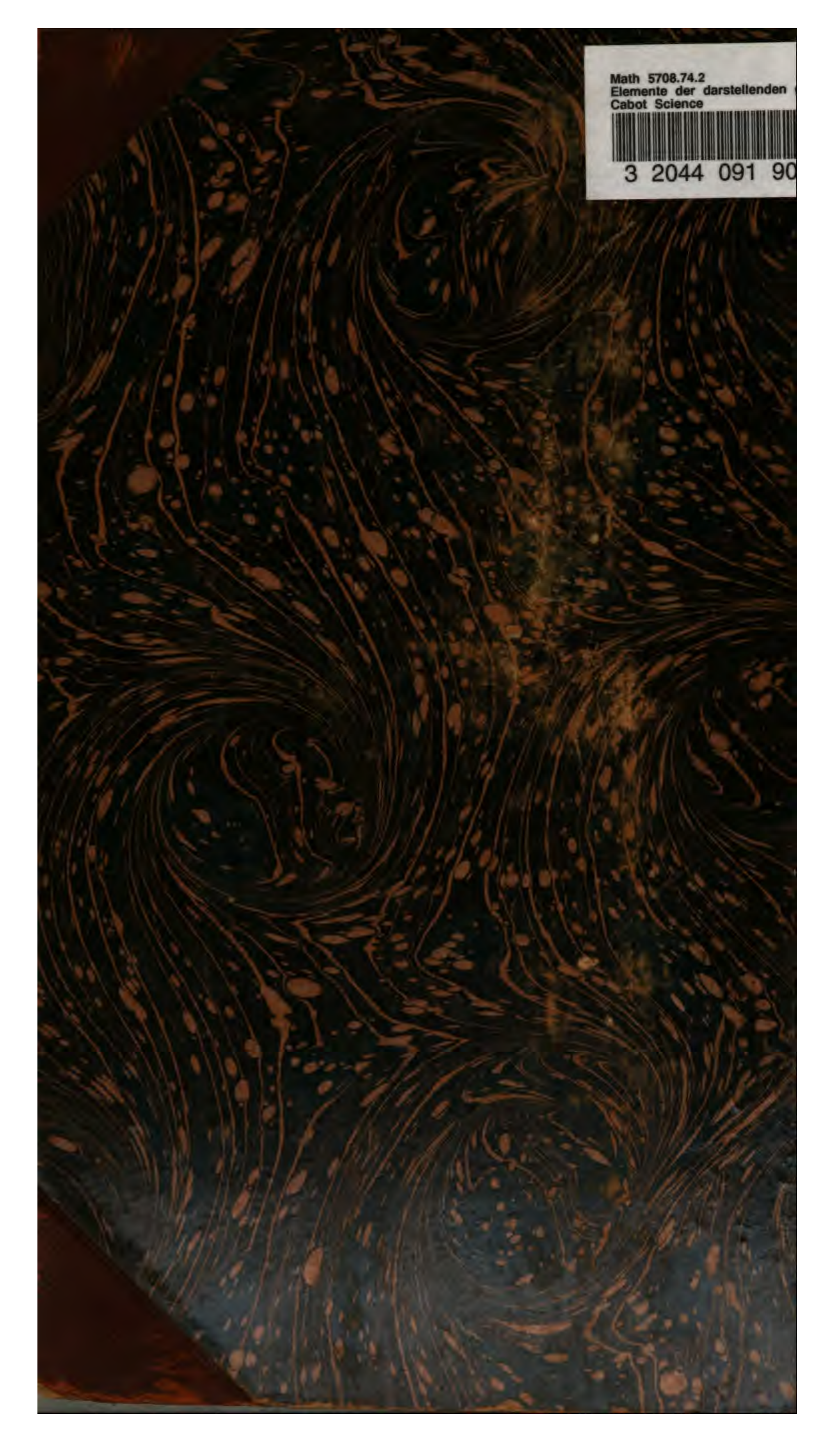
A'

K'_∞

Fig. 57.






Math 5708.74.2
Elemente der darstellenden
Cabot Science
3 2044 091 90